학술원논문집 (자연과학편) 제62집 1호 (2023) 211-244

유전체 쐐기의 평면파 산란*

나 정 웅**

Plane Wave Scattering by a Dielectric Wedge*

Jung Woong Ra**

ABSTRACT

It is known that the static electric field polarized in the edge direction is divergent at the edge of dielectric wedge with its lowest eigen value ν_1 satisfying $0 < \nu_1 < 1$. For H-polarized plane waves incidence, the dynamic electric field satisfying Helmholtz equations asymptotically may be approximated by modifying the static field with its eigen values, $\nu_1(1-\Delta)$ in its ρ-dependence and $\nu_1(1+\Delta)$ in the ϕ-dependence, where Δ is taken as $\Delta_1 = (\pi\rho/(\nu_1\lambda_1))^2$ and $\Delta_2 = (\pi\rho/(\nu_1\lambda_2))^2$, $\Delta_{1,2} < 1$ in the air and the dielectric regions, respectively, ρ is the distance of the field point from the edge, and $\lambda_{1,2}$ are the wavelengths in the air and the dielectric media, respectively. Its modal coefficient may be obtained from the expansion coefficient of the diverging electric field mode of the corresponding conducting wedge. This diverging electric fields die out quickly as $\rho^{-1+\nu_1(1-\Delta_{1,2})}$ and the geometric optical (G. O.) fields dominate over divergent electric fields as ρ increases.

---

* 본 논문은 2022년도 대한민국학술원 전문학술활동 지원으로 이루어짐
** 대한민국학술원 자연과학부 제3분과 회원

One may derive the physical optics (P. O.) approximation via Green's theorem, where the G. O. fields are used as the boundary fields in the dielectric interfaces. P. O. approximated analytic solution gives G. O. fields plus the edge diffracted waves, v_1 and v_2, in the physical regions of the air and the dielectric media, respectively, and only the edge diffracted waves in the respective mathematical complementary regions. One may assume a correction currents, say v_2 without its P. O. diffraction pattern function, multiplied by unknown diffraction patterns along the dielectric interfaces, and obtain the unknown pattern function via the extinction theorem, which nullifies the sum of the correction fields and $v_{1,2}$ in the respective mathematical complementary regions, numerically. The total fields by adding the magnetic fields corresponding to the diverging electric fields to the corrected P. O. fields may be claimed as a rigorous solution since it satisfies the edge condition, the radiation condition, and the interface boundary conditions of the dielectric wedge.

Key words; edge condition of dielectric wedge, diverging electric field at the edge, edge diffraction, corrected edge diffraction,

초 록

유전체 쐐기의 모서리 방향으로 분극된 정전기 전장은 가장 작은 고유값 ν_1인 성분이 $0 < \nu_1 < 1$임으로 모서리에서 발산한다. H-분극의 평면 입사파시, 동(dynamic) 전장은, 정전 전장의 고유함수에 ρ-방향 고유값으로 $\nu_1(1-\Delta)$와, ϕ-방향 고유값으로 $\nu_1(1+\Delta)$을 사용하여, 근사 식을 얻을 수 있다. Δ 값으로, 공기 영역에서 $\Delta_1 = (\pi\rho/(\nu_1\lambda_1))^2 < 1$과 유전체 영역에서 $\Delta_2 = (\pi\rho/(\nu_1\lambda_2))^2 < 1$을 사용하면, 동 전장은 Helmholtz 방정식을 점근적으로 만족함을 보일 수 있다. 여기서 ρ는 모서리에서 전장 점 사이의 거리이며, $\lambda_{1,2}$는, 각각, 공기중과 유전체 내의 파장이다. 모서리에서 전장이 발산하는 모드의 진폭은 유전체 쐐기의 유전율을 ∞로 하는 도체 쐐기의 모서리에서 발산하는 모드의 전개 상수에서 얻을 수 있다. 유전체 쐐기의 발산하는 전장은 ρ가 증가하면 $\rho^{-1+\nu_1(1-\Delta_{1,2})}$로, 대단히 빨리 감쇄하고, 기하광학파가 지배하는 전장이 된다.

기하광학(G. O.) 해를 유전체 쐐기의 경계면 전자장으로 사용하면, Green 정리를 이용하여 유전체 쐐기의 안과 밖에서의 물리 광학(P. O.) 근사의 전자장을 얻을 수

있다. 물리 광학 근사식은, 물리적 공간(physical regions)에서 기하광학파와 모서리 회절파인, 공기영역의 v_1과 유전체영역의 v_2를 주며, 공기영역과 유전체영역의 가상 보완 공간(mathematical complementary region)에서는, 각각, v_1과 v_2만을 준다. 경계면 조건을 만족하기 위하여, 소멸정리(Extinction theorem)에 의해 가상 보완 영역의 전자장, $v_{1,2}$와 교정 전자장의 합을, 동시에 영으로 만들어야 된다. 경계면에 교정 전류로, 물리 광학 회절 패턴을 뺀 v_2에 구하려 하는 교정 회절패턴을 곱하여 사용하면, 소멸정리를 이용하여, 교정 회절 패턴을 수치계산으로 구할 수 있다. 경계면 교정전류로부터 교정자장을 계산하여, 실 공간의 물리광학 해와 합하여, 경계면 조건을 만족하는 해를 구한다. 교정한 해와 모서리에서 발산하는 전자장을 합하여 얻은 해는 모서리 조건, 복사조건 및 경계면 조건을 만족하므로, 엄밀한 해(rigorous solution)라 주장할 수 있을 것이다.

주제어: 유전체 쐐기의 모서리 조건, 모서리에서 발산하는 전장, 모서리 회절파, 교정한 모서리 회절파

목 차

1. 서론

유전체 쐐기에 의한 평면파 산란 문제는 변수분리 방법을 적용할 수 없어, 아직까지 해석 해가 없다. 정확한 해석해를 얻기 위한 노력[1,2,3,4]이 있었지만, 모두 잘못된 결과[5,6]임이 밝혀졌다. 유전체의 상대유전율이 작거나, 쐐기각이 작을 때, 작은 변수의 급수 전개로 근사해[7,8]를 얻었으며, 손실 유전체일 때 임피단스 경계 조건을 사용한 근사해[9,10], 또는 경험적인(heuristic) 근사해[11]가 존재하지만, 그 정확도는 알 수 없다. 유전체 쐐기 모서리 부근의 전자장을 모서리에서의 거리 ρ의 멱 급수(power series)로 전개하여, $\rho=0$일 때 정전 전자장

에 근접함을 보였으나[12], 이 급수해는 쐐기 각이 π의 유리 배수 값에서 발산하는 모순을 보인다[13]. $\rho=0$일 때 정 전기적인 극한 값과 다른 동적 전자장 극한 값이 존재할 것이라는 지적도 있다[14].

주창성 등[15]은 직각 유전 쐐기 경계면에 기하 광학(geometrical optics(G. O.)) 근사해를 사용하여 유전체 내외의 전 공간에서, 기하광학파와 모서리 회절파를 얻었다. 이 물리 광학(physical optics(P. O.)) 근사해의 모서리 회절파를, 소멸정리(extinction theorem)[16]를 사용하여 수치계산으로 교정하여, 점근적으로 정확한 모서리 회절파를 얻을 수 있었다. 김세윤 등은 일반 쐐기각 유전체 쐐기의 평면파 산란 문제에 광선 추적(ray tracing) 방법을 사용하여 기하광학파와 물리광학 모서리 회절파를 얻었으며[17], 유전체 경계 면에 정전기적 모서리 조건을 만족하는 Neumann 급수[28]로 전개한 교정 전자장을 사용하여 물리광학 모서리 회절파를 교정한, 점근적으로 정확한 모서리 회절파를 얻을 수 있었다[18]. 위와 같이, 소멸정리를 사용하여, 하헌태 등은 도체 쐐기와 유전체 쐐기가 합해진 복합 쐐기[19]에 대하여, 서종화 등은 손실 유전체 쐐기[20]에 대하여, 기하광학파와 점근적으로 정확한 교정된 모서리 회절파를 얻었다. 전재영 등은, 김세윤 등의 Neumann 급수[28]로 전개한 교정 전자장을 사용하여, 모서리 부근에서 모서리 회절파가 정전기적 전자장에 접근함을 수치계산으로 보여 주었다[21]. Wiener-Hopf 방법을 2차원 유전체 산란 문제에 적용하여 파수 영역의 인수분해(factorization)를 근사적으로 얻은 논문[22]과 물리광학 근사 계산 방법을 3차원 유전체 쐐기 산란에 적용한 논문도 보인다[23,24].

평면파가 임의의 쐐기각과 상대유전율을 가지는 2차원 유전체 쐐기에 입사할 때, Green정리와 소멸정리의 식을 II장에서 유도하고, 경계면 위에 기하광학파 해를 사용하여, 쐐기 안과 밖에서 물리광학 해를 구한 과정을 III장에 보인다. H-분극 입사파의 경우, 모서리 부근에서 전장이 발산하며, 모서리 점에서 정전기적 전자장에 수렴하고, Helmholtz 방정식을 만족하는 동적인 전장의 근사 해석 해를 얻을 수 있음을 IV장에 보인다. 임의의 모서리 회절 패턴을 가진 물리광학 모서리 회절파를, 경계면 교정 전자장으로 가정하면, 모서리 회절 패턴은 소멸정리를 이용하여 수치계산으로 얻을 수 있음을 V장에 보인다. 모서리 부근에서 발산하는 전장을 가진 전자장 식을 물리광학 근사 해를 교정한 전자장에 더하면, 모서리 조건과 경계면에서 접선 성분 전장과 자장이 연속인 경계조건, 그리고 무한점에서 복사 조건을 만족하는 엄밀한 해를 얻게 된다.

Ⅱ. 정확한 산란 전자장에 대한 2차원 그린 정리(Green's theorem)와 소멸정리(Extinction theorem)

그림 1에 쐐기각이 θ_d인 유전체 쐐기와, 식 (1a,b)에 보인 H-분극 입사파 H^i와 u^i, 산란 전자장의 직각 또는 원통 좌표계, $(x, y; \rho, \theta)$, 그리고 유전체 영역(S_d)과 그 파수 k_1, 공기영역(S_v)과 파수 k_2를 보인다. 유전체 쐐기의 투자율과 유전율은 $(\mu_0,\ \varepsilon_2)$이며, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$로서 ε_r은 유전체의 상대 유전율, $(\mu_0,\ \varepsilon_0)$은 공기 매질의 투자율과 유전율이며, $k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$와 $k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_2}$이다. H-분극시 평면 입사파 자장 H^i는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{H}^i(\rho,\theta) = \mathbf{z}_0 u^i(\rho,\theta),\ u^i(\rho,\theta) = e^{ik_1\rho\cos(\theta-\theta_i)}. \qquad (1a,b)$$

여기서, $\mathbf{z}_0$는 z-방향 단위 벡터이며, ω는 입사파의 각 주파수, θ_i는 입사각, u^i는 입사 평면파 자장, 그리고 시간 t에 따라 변하는 전자장의 시간 의존함수 $e^{-i\omega t}$는 생략하였다. (1)식에 보인 입사파는 산란파로 $\mathbf{H}(\rho,\theta) = \mathbf{z}_0 u(\rho,\theta)$를 주며, 여기서 $u(\rho,\theta)$는 유전체 내(S_d)와 공기매질 내(S_v)에서, 각각, 다음의 Helmholtz 방정식을 만족한다.

$$(\nabla^2 + k_1^2)u(\rho,\theta) = s_0,\ \text{in } S_v, \qquad (2a)$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)u(\rho,\theta) = 0,\ \text{in } S_d, \qquad (2b)$$

여기서, s_0는 식 (1)의 입사 평면파를 만들어주는 전원이다. 공기 매질과 유전체 매질로 채워진 2차원 자유공간의 Green함수로 $G_1(x, y; x', y')$과 $G_2(x, y; x', y')$라 하면, 이는 delta함수, $\delta(x - x')$를 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$(\nabla^2 + k_{1,2}^2)G_{1,2}(x, y; x', y') = -\delta(x - x')\delta(y - y'), \qquad (3a,b)$$

$$G_{1,2}(x, y; x', y') = F^{-1}\left[g_{1,2}(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x' + \beta y')}\right], \qquad (3c,d)$$

$$F^{-1} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{i(\alpha x + \beta y)}, \qquad (3e)$$

$$g_{1,2}(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 - k_{1,2}^2}, \qquad (3f,g)$$

$$\delta(x - x')\delta(y - y') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{i\alpha(x-x') + i\beta(y-y')}. \qquad (3h)$$

여기서, F^{-1}는 역 Fourier변환이며, (x, y)는 장 점이며, (x', y')는 전원 점이다.
(3b)식과 (2b)식의 양변에, 각각, u와 G_2을 곱하고, 두 식의 차를 유전체 매질의 실공간 S_d에서 면 적분하려 한다. 면 적분시, $\nabla\cdot[G\nabla u] = \nabla G\cdot\nabla u + G\nabla^2 u$의 벡터 항등식과 발산 정리를 적용하면, 경계면 값의 선 적분 식 (4a)를 얻는다.

$$\iint_{S_d} dxdy\left\{G_2\nabla^2 u - u\nabla^2 G_2\right\} = \oint_{C_1+C_2+C_\infty} ds\left\{G_2\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G_2}{\partial n}\right\} = \int_{C_1+C_2} ds\left\{G_2\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G_2}{\partial n}\right\}. \tag{4a}$$

여기서, 경계면, C_1, C_2는 그림 1에 보였으며, C_∞는 S_d 영역의 $\rho\to\infty$인 무한대 면이며, 경계면에 수직인 편미분 $\dfrac{\partial}{\partial n}$의 방향은 유전체 경계면에서 적분공간 S_d 밖으로 향하게 택한다. $\rho\to\infty$에서 Sommerfeld 2차원 복사 조건[25]을 만족하도록 한다면, (4a)식의 C_∞면 적분은 영이 되고, C_1과 C_2적분만 남아 식(4a)가 된다. 전체의 차이 식 면 적분에 (4a)식의 결과를 대입하면, 다음 두 식을 얻는다.

$$u(x,y) = F^{-1}\left[\frac{-1}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\left\{P(\alpha,\beta)+Q(\alpha,\beta)\right\}\right],\ \text{in } S_d, \tag{5a}$$

$$F^{-1}\left[\frac{P(\alpha,\beta)+Q(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\right] = 0 \text{ in } \overline{S_d}, \tag{5b}$$

여기서, 그린함수의 전원 점 (x', y')는 S_d 영역에 있다고 가정하였으며, 위 식 유도 과정에서 사용한 미분방정식이 유전체 매질로 채워진 자유 공간의 방정식이므로,

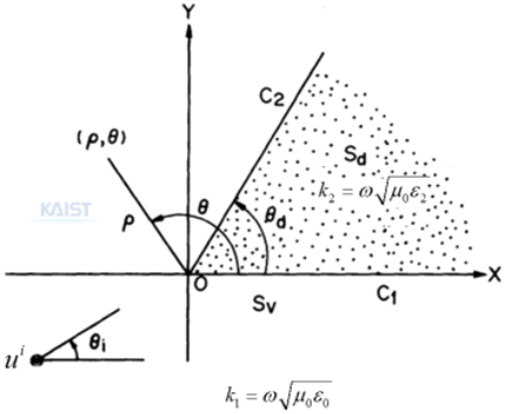


그림 1. 쐐기각이 θ_d이고 상대유전율 ε_r인 유전체쐐기(S_d 영역)에 공기 영역(S_v)에서 각 θ_i로 입사한 평면 전자파와 좌표계.

전 공간($0 \le \theta \le 2\pi$)에서 $S_d\,(0 < \theta < \theta_d)$를 제외한 공간을 $\overline{S_d}\,(\theta_d < \theta < 2\pi)$의 수학적인 가상 보완 공간(mathematical complementary region)이라 한다. $P(\alpha, \beta)$와 $Q(\alpha, \beta)$는 경계면 위($\theta = 0, \theta_d$)의 적분으로 다음과 같이 구한다[17]. 영역 밖으로 향하는 경계면 수직방향 미분은 경계면과 영역에 따라 $\frac{\partial}{\partial n}$의 부호를 선택하여 사용하였다.

$$P(\alpha,\beta) = i\beta\int_0^\infty d\rho u(\rho,0)e^{-i\alpha\rho} + i(\alpha\sin\theta_d - \beta\cos\theta_d)\int_0^\infty d\rho u(\rho,\theta_d)e^{-i(\alpha\cos\theta_d+\beta\sin\theta_d)\rho}, \tag{5c}$$

$$Q(\alpha,\beta) = \int_0^\infty d\rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}u(\rho,0)e^{-i\alpha\rho} - \int_0^\infty d\rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}u(\rho,\theta_d)e^{-i(\alpha\cos\theta_d+\beta\sin\theta_d)\rho}. \tag{5d}$$

위에서 유도한 (5a)식은 Kirchhoff 적분이라고 부르며 그린 정리(Green's theorem)의 식으로, (5b)식은 소멸정리(extinction theorem)의 식으로 알려져 있다.

(3a)식과 (2a)식의 양변에, 각각, u와 G_1을 곱하고, 두 식의 차를 공기 매질의 실 공간 S_v에서 면 적분을 하면, 앞에서와 같이 벡터 항등식과 발산 정리를 적용하여, 경계면 값의 선 적분으로 바꿀 수 있으며, 다음을 얻는다.

$$u(\rho,\theta) = u^i(\rho,\theta) + F^{-1}\left[\frac{P(\alpha,\beta)+Q(\alpha,\beta)/\varepsilon_r}{\alpha^2+\beta^2-k_1^2}\right], \text{ in } S_v, \tag{6a}$$

$$0 = u^i(\rho,\theta) + F^{-1}\left[\frac{P(\alpha,\beta)+Q(\alpha,\beta)/\varepsilon_r}{\alpha^2+\beta^2-k_1^2}\right], \text{ in } \overline{S_v}. \tag{6b}$$

여기서 s_0와 그린함수의 전원점 (x', y')은 실공간 S_v에 존재한다고 가정하여, (6a) 식의 Kirchhoff 적분과 소멸 정리식 (6b)를 얻으며, 사용한 미분방정식이 공기매질에서 만족함으로, 전 공간에서 S_v영역($\theta_d < \theta < 2\pi$)을 제외한 공간을 수학적인 가상 공간 $\overline{S_v}(0 < \theta < \theta_d)$라 한다. 전원 s_0는 (1a,b)식으로 주어진 입사 평면파를 만든다고 가정하여, (6c)식을 얻는다.

$$-\iint_{S_v} dx'dy's_0(x',y')G_1(x,y;x',y') = u^i(\rho,\theta). \tag{6c}$$

$Q(\alpha, \beta)/\varepsilon_r$항은 유전체 경계면 조건인 접선 성분 전장의 연속 조건에서 구한다. 유전체 내의 경계면 자장으로 식 (5a)의 u를 사용할 때, 경계면 접선성분 전장은,

ρ_0 성분인 $E_{2\rho} = \frac{i}{\omega\varepsilon_2}\frac{\partial u}{\rho\partial\theta}$가 되며, 공기 매질의 경계면 접선성분 전장 $E_{1\rho}$은 (5a)식에 사용한 전장과 연속인 전장이 되어야 함으로,

$$\frac{\partial u(\rho,\theta=0_-,\theta_{d+})}{\rho\partial\theta}=\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial u(\rho,\theta=0_+,\theta_{d-})}{\rho\partial\theta}, \text{ for H-polarization,} \tag{6d,e}$$

를 얻는다. 여기서, 경계면 접선 성분 자장은 $u(\rho;\theta=0_{-,}\ \theta_{d+})=u(\rho;\theta=0_+,\ \theta_{d-})$로 연속이며, 괄호 안의 $\theta=0_{-,}\ \theta_{d+}$는 공기측 경계면을, 그리고 $\theta=0_{+,}\ \theta_{d-}$는 유전체측 경계면을 의미한다. $P(\alpha,\ \beta)$와 $Q(\alpha,\ \beta)$는 식 (5c,d)에 정의 되어 있으며, $\frac{\partial}{\partial n}=\pm\frac{\partial}{\rho\partial\theta}$의 부호의 선택은 (6a,b)식에 반영되어 있다.

쌍 적분 방정식 (5a)와 (6a)는 Green 정리를 사용하여 유도한, 경계면 전자장이 주어져 있을 때, 실 공간(S_v, S_d)의 전자장을 구할 수 있는 적분 방정식이다. 한편, 적분 방정식 (5b)와 (6b)는 경계면 조건을 만족하는 정확한 경계면 전자장을 사용하면, 가상공간($\overline{S_v}, \overline{S_d}$)에서 전자장은 영이 된다는 소멸정리(extinction theorem)를 보인다[15,17-21].

Ⅲ. 기하 광학(G. O.) 파와 물리 광학(P. O.) 근사

그림 2와 같이, 직각 쐐기에 H-분극 평면파가 입사할 때, 유전체 경계면의 전자장은 기하광학(G. O.)해로 근사할 수 있다. 기하광학해는 경계 면이 무한 평면일 때, 정확한 해로서, 평면 입사파는 경계 면에서 반사와 굴절이 일어나, 직각 유전체 쐐기의 경우, S_v 영역에 다음의 반사파, u_{g1}과 u_{g2}, 그리고 S_d 영역의 투과파, u_{g3}과 u_{g4}로 근사할 수 있다.

$$u_{g1}(\rho,\theta)=W_\theta(2\pi-\theta_i,2\pi)R_x(\theta_i)e^{ik_v\rho\cos(\theta+\theta_i)}, \tag{7a}$$

$$u_{g2}(\rho,\theta)=W_\theta(\frac{\pi}{2},\pi-\theta_i)R_y(\theta_i)e^{-ik_v\rho\cos(\theta+\theta_i)}, \text{ in } S_v, \tag{7b}$$

$$u_{g3}(\rho,\theta)=W_\theta(0,\theta_1)T_x(\theta_i)e^{ik_v(x\cos\theta_i+y\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i})},\ \sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_1=\cos\theta_i, \tag{7c,d}$$

$$u_{g4}(\rho,\theta)=W_\theta(\theta_2,\frac{\pi}{2})T_y(\theta_i)e^{ik_v(x\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}+y\sin\theta_i)},\ \sqrt{\varepsilon_r}\sin\theta_2=\sin\theta_i, \text{ in } S_d. \tag{7e,f}$$

여기서, 제한적인 영역에서 발생하는 표현식으로 창함수 $W_\theta(\chi,\gamma)$,

$$W_\theta(\chi,\gamma)=\begin{cases}1, & \chi<\theta<\gamma,\\ 0, & \text{elsewhere.}\end{cases} \tag{7g}$$

를 사용하며, θ_1와 θ_2는, 각각, x-축과 y-축 경계 면의 굴절 각으로 식 (7d,f)로 주어지며, $R_x(\theta_i)$, $R_y(\theta_i)$, $T_x(\theta_i)$, $T_y(\theta_i)$는, 각각, x-축과 y-축 경계면 반사 계수와 투과 계수로서, 다음과 같이 주어진다.

$$R_x(\theta_i)=\frac{\tau\sin\theta_i-\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}}{\tau\sin\theta_i+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}},\ T_x(\theta_i)=1+R_x(\theta_i), \tag{8a,b}$$

$$R_y(\theta_i)=\frac{\tau\cos\theta_i-\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}{\tau\cos\theta_i+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}},\ T_y(\theta_i)=1+R_y(\theta_i), \tag{8c,d}$$

여기서, H-분극일 때 $\tau=\varepsilon_r$이며, E-분극일 때 자성 쐐기의 투자율을 μ_2라 하면, $\tau=\mu_2/\mu_0$이다.

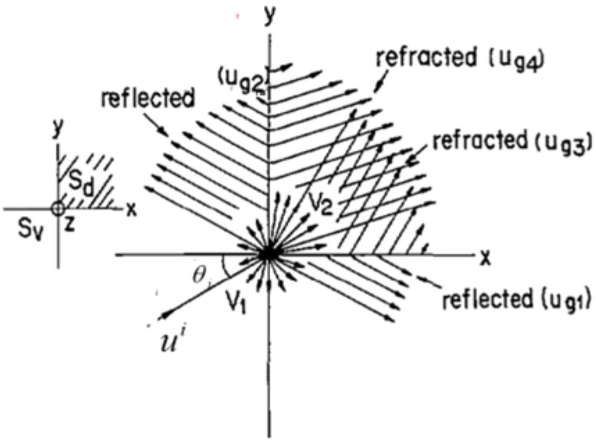


그림 2. 직각쐐기에 H-분극 입사파 u^i가 입사할 때, 기하광학파 u_{g1}, u_{g2}, u_{g3}, u_{g4}와 물리광학 모서리 회절파 v_1, v_2.

경계면 위의 기하광학 해를 식 (5c,d)에 대입하여, $P_p(\alpha,\beta)$와 $Q_p(\alpha,\beta)$를 다음과 같이 구한다.

$$P_p(\alpha,\beta)=T_x(\theta_i)\frac{\beta}{\alpha-k_v\cos\theta_i}+T_y(\theta_i)\frac{\alpha}{\beta-k_v\sin\theta_i}, \tag{9a}$$

$$Q_p(\alpha,\beta)=T_x(\theta_i)\frac{k_v\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}}{\alpha-k_v\cos\theta_i}+T_y(\theta_i)\frac{k_v\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}{\beta-k_v\sin\theta_i}. \tag{9b}$$

여기서, $P_p(\alpha,\ \beta)$와 $Q_p(\alpha,\ \beta)$의 첨자 p는, 경계면 자장으로 기하광학 해를 사용하여 얻은, 물리광학 근사(p)라는 의미이다. 식 (9a,b)를 식 (5a)와 (6a)에 대입하면, S_d와 S_v 영역의 물리 광학 근사해, $u_p(x,y)$를 다음과 같이 얻는다.

$$u_p(x,y)=F^{-1}\left[\frac{-\left\{P_p(\alpha,\beta)+Q_p(\alpha,\beta)\right\}}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\right]=J_{px}(x,y)+J_{py}(x,y),\ \text{in}\ S_d, \tag{10a}$$

$$J_{px}(x,y)=F^{-1}\left[-T_x(\theta_i)\frac{\beta+k_1\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}}{(\alpha^2+\beta^2-k_2^2)(\alpha-k_1\cos\theta_i)}\right], \tag{10b}$$

$$J_{py}(x,y)=F^{-1}\left[-T_y(\theta_i)\frac{\alpha+k_1\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}{(\alpha^2+\beta^2-k_2^2)(\beta-k_1\sin\theta_i)}\right], \tag{10c}$$

$$u_p(x,y)=u^i(x,y)+F^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^2+\beta^2-k_1^2}\left\{P_p(\alpha,\beta)+Q_p(\alpha,\beta)/\varepsilon_r\right\}\right]$$
$$=u^i(x,y)-I_{px}(x,y)-I_{py}(x,y),\ \text{in}\ S_v, \tag{11a}$$

$$I_{px}(x,y)=F^{-1}\left[-T_x(\theta_i)\frac{\beta+k_1\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\alpha^2+\beta^2-k_1^2)(\alpha-k_1\cos\theta_i)}\right], \tag{11b}$$

$$I_{py}(x,y)=F^{-1}\left[-T_y(\theta_i)\frac{\alpha+k_1\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\alpha^2+\beta^2-k_1^2)(\beta-k_1\sin\theta_i)}\right]. \tag{11c}$$

물리광학 근사해는 적분식 I_{px}, I_{py}, J_{px}와 J_{py}를 포함하는데, 피적분 함수의 상수항만 다름으로 대표적인 적분식 (11b)의 I_{px}를 택하여 그 전개 방법을 살펴보려 한다. I_{px}의 β-적분을 먼저 생각할 때, 두개의 pole, $\beta_{p1,2}=\pm\sqrt{k_1^2-\alpha^2}$이 존재하며, 약간의 손실이 있는 공기매질을 가정하면, k_1의 허수 부분인, $Im(k_1)\geq 0$이

되며, $\alpha = 0$일때, $Im(\beta_{p1}) > 0$과 $Im(\beta_{p2}) < 0$이 된다. 무손실 공기매질일 때의 극한을 취하면, 실수축 적분 경로인 $\int_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{i\beta y}$는, 그림 3(a)와 같이, y의 부호에 따라, pole의 아래와 위로 pole을 돌아가는 경로가 된다. Jordan의 정리를 사용하기 위하여, $\lim_{|\beta| \to \infty,\, Im\beta > 0} (e^{i\beta y})_{y>0} \to 0$이 됨으로, $y > 0$이면 그림 3(a)와 같이, β의 위-반평면($Im(\beta) > 0$)을 둘러싸는 경로 Γ_1을 적분 $\int_{-\infty}^{\infty} d\beta$에 다른 기여 없이 더할 수 있으며, $y < 0$이면, $\lim_{|\beta| \to \infty,\, Im\beta < 0} (e^{i\beta y})_{y<0} \to 0$이 됨으로, β의 아래-반평면을 둘러싸는 적분의 경로, Γ_2를 적분경로 $\int_{-\infty}^{\infty} d\beta$에 다른 기여 없이 더할 수 있다. 이에 따라, 피적분 함수의 두개 pole, $\beta_{p1,2} = \pm\sqrt{k_v^2 - \alpha^2}$를 둘러싸는 경로의 기여를 Jordan의 정리에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$I_{px}(x,y) = -\frac{i}{2\pi} T_x(\theta_i) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\pm\sqrt{k_1^2 - \alpha^2} + k_1\sqrt{\varepsilon_r - \cos^2\theta_i} / \varepsilon_r}{2\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}(\alpha - k_1\cos\theta_i)} e^{i\left[\alpha x \pm \sqrt{k_1^2 - \alpha^2} y\right]},\ y \gtrless 0, \qquad (12a,b)$$

위의 α-평면 적분은 분지점(branch point) $a_{b1,2} = \pm k_1$을 가지며, (12a,b)식은 $Im\sqrt{k_1^2 - \alpha^2} > 0$인 Riemann 윗-평면에서 수렴하는 적분이다. α-적분을 $\alpha = k_1 \cos w$ 변환을 사용하여 w-평면 적분으로 바꾸면, 분지점이 제거되며 다음의 w-평면 적분을 얻는다.

$$I_{px}(\rho,\theta) = \frac{i}{4\pi} T_x(\theta_i) \int_P dw \frac{\pm\sin w + \sqrt{\varepsilon_r - \cos^2\theta_i} / \varepsilon_r}{(\cos w - \cos\theta_i)} e^{ik_v\rho\cos(w\mp\theta)},\quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi, \\ \pi \le \theta \le 2\pi. \end{matrix} \qquad (12c,d)$$

여기서 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$의 좌표변환을 사용하고, α-평면 적분경로 $\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha$는, 그림 3(b)와 같이, w-평면의 적분경로 P로 변환시킬 수 있다. 이는 다음의 변환,

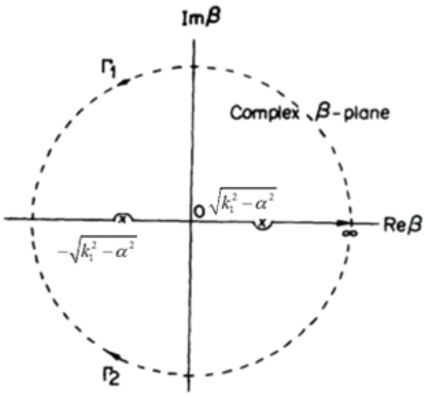
$$\alpha = k_1\cos w = k_1(\cos w_r \cosh w_i - i\sin w_r \sinh w_i),\ w = w_r + iw_i, \qquad (12e,f)$$

을 사용하여, α-적분을 그림 3(b)의 w-평면 경로 P의 적분으로 바꾸고, $\alpha \to \pm\infty$인 적분의 끝점을, 피적분 함수가 수렴하는 P경로의 끝점과 시작점으로 선택한다. 이

때, $w=\theta$점은 1차 안장점(saddle point)이며, 안장점에서 멀리 떨어지면 피적분 함수의 크기가 지수함수적으로 작아지는, Steepest Descent Path(SDP)경로를 그림 3(b)와 같이 정의하여, 적분경로 P를 SDP경로로 변환시켜 사용할 수 있다. 그림 3(b)의 사선으로 표시한 구역은 피적분 함수의 크기가 안장점의 피적분 함수 값보다 작은 골짜기 영역이다.

(12a,b)식 적분의 pole, $\alpha_p = k_1\cos\theta_i$는 공기를 약간의 손실 매질이라 가정하면, $Im(k_1)>0$임으로 $Im(\alpha_p)>0$이며, 해당하는 w-평면의 pole은 $\alpha_p = k_1\cos w_p$로 $Im(\cos w_p)>0$을 의미하며, pole $w_p=\theta_i$는, w_p의 실수 부분인, $0\le Re(w_p)\le\pi$ 구간에서 (12e,f)식으로부터, $Im(w_p)<0$이 만족되어야 함을 볼 수 있다. 이 조건은 w_p가 음수의 허수부분을 가지며, 그림 3(b)와 같이, pole $w_p=\theta_i$가 적분경로 P의 실수축 경로 아래에 위치하여야 한다. 이는, 손실이 영이 되는 극한에서, 경로 P가 실수축의 pole 위로 돌아감을 의미한다. 따라서, $0\le\theta\le\pi$ 구간에서, $0\le\theta\le\theta_i$일 때 적분경로 P를 SDP경로로 변환하려면, pole θ_i을 완전히 감싸는 경로를 더해 주어야 한다. 즉, 적분경로 P를 1차 안장점 $w_s=\theta$를 지나는 SDP와 pole $w_p=\theta_i$의 주위를 시계 반대 방향으로 도는 경로의 합으로 바꿀 수 있다. 따라서, $0\le\theta\le\theta_i$ 구간에서 pole의 기여를 따로 더하여, 적분식 (12c)의 $I_{px}(\rho,\theta)$를 다음과 같은, pole기여와 SDP경로 적분으로 얻는다.

(a)



(b)

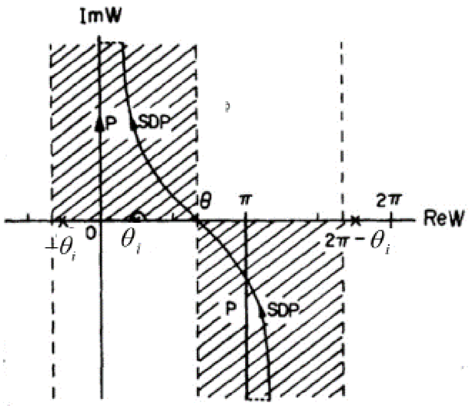


그림 3. (a) pole $\beta_{p1,2}=\pm\sqrt{k_1^{2}-\alpha^2}$의 기여를, $y>0$와 $y<0$의 영역에서, 각각, β-평면의 위 반평면과 아래 반평면을 둘러싸는 선적분 $\Gamma_{1,2}$으로 얻는다. (b) $\alpha=k_1\cos w$ 변환으로 얻은 w-평면의 적분경로 P와 SDP, pole θ_i, 그리고 안장점 θ.

$$I_{px}(\rho,\theta)=W_\theta(0,\theta_i)e^{ik_1\rho\cos(\theta-\theta_i)}+\frac{i}{4\pi}T_x(\theta_i)\int_{SDP}dw\frac{\sin w+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\cos w-\cos\theta_i)}e^{ik_1\rho\cos(w-\theta)},$$
$$0\le\theta\le\pi. \tag{12g}$$

여기서, $\alpha=k_1\cos w$, $d\alpha=-k_1\sin w dw$를 사용하였으며, 첫 항은 pole의 기여 범위를 (7g)식의 창 함수 $W_\theta(0,\theta_i)$로 표시하고, pole $w_p=\theta_i$의 유수(residue)와 pole의 기여 $[I_{px}(\rho,\theta)]_{w_p}$를 다음과 같이 계산하여 얻었다.

$$\text{Resi.}(\theta_i)=\lim_{w\to\theta_i}(w-\theta_i)\frac{\sin w+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}/\varepsilon_r}{\cos w-\cos\theta_i}e^{ik_1\rho\cos(w-\theta)}=-\left(1+\frac{\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}}{\varepsilon_r\sin\theta_i}\right)e^{ik_1\rho\cos(\theta-\theta_i)},$$
$$\left[I_{px}(\rho,\theta)\right]_{w_p}=\frac{i}{4\pi}T_x(\theta_i)(2\pi i)\text{Resi.}(\theta_i)=e^{ik_1\rho\cos(\theta-\theta_i)}. \tag{12h,i}$$

구간 $\pi\le\theta\le2\pi$에서 $I_{px}(\rho,\theta)$는 (12d)식으로 다음과 같다.

$$I_{px}(\rho,\theta)=\frac{i}{4\pi}T_x(\theta_i)\int_P dw\frac{-\sin w+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\cos w-\cos\theta_i)}e^{ik_1\rho\cos(w+\theta)},\ \pi\le\theta\le2\pi, \tag{12d}$$

이 식을 $0\le\theta\le\pi$ 구간의 $I_{px}(\rho,\theta)$와 비교하면, 피적분 함수의 $-\sin w$항과 지수 함수 항 $e^{ik_1\rho\cos(w+\theta)}$이 다르며, 적분경로 P의 실수 구간에 존재하는 pole과 가장 가까운 안장점은, $w_s=2\pi-\theta$($0\le\theta\le\pi$ 구간의 안장점 $w_s=\theta$와 다름)이 된다. 적분경로 P를 SDP로 경로변환 하려면, $w_s<\theta_i$일 때, pole $w_p=\theta_i$를 시계반대방향으로 둘러싼 경로를 더해 주어야 함으로, pole의 기여 범위를 $W_\theta(2\pi-\theta_i,2\pi)$로 잡고 (12h,i)식에서와 같이 유수와 pole의 기여를,

$$\left[I_{px}(\rho,\theta)\right]_{w_p}=\frac{i}{4\pi}T_x(\theta_i)(2\pi i)\text{Resi.}(\theta_i)=-\frac{\varepsilon_r\sin\theta_i-\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}}{\varepsilon_r\sin\theta_i+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}}e^{ik_1\rho\cos(\theta+\theta_i)}, \tag{13a}$$

로 계산하며, 이는 (7a)식의 u_{g1}이 된다. SDP경로는 안장점의 위치가 바뀌어서 새로운 안장점, $w_s=2\pi-\theta$를 통과하는 SDP1로 정의할 수 있다. 변환된 $\hat{w}=2\pi-w$ 평면에서 안장점은 $\hat{w}_{s2}=\theta$가 되며, α-적분 $\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha$의 끝점 $\pm\infty$이 사상되는 $\hat{w}$-

평면의 경로 SDP2의 끝점은 w-평면의 SDP1 경로의 끝점과 부호가 반대가 되어, SDP2의 적분 진행방향이 SDP1과 반대가 된다. 또한, $\int_P d\hat{w}$ 적분은 $d\hat{w}=-dw$ 로서 (-)부호를 추가한다. 따라서 $\hat{w}$-평면의 적분은, 추가된 (-)부호와 $\hat{w}$-평면의 적분 진행방향이 반대로 (-)부호를 주는 점과 상쇄하여, 그림 3(b)의 SDP와 같은 경로로 변환시킬 수 있으며, 피적분함수의 $-\sin w \rightarrow \sin\hat{w}$, $e^{ik_1\rho\cos(w+\theta)} \rightarrow e^{ik_1\rho\cos(\hat{w}+\theta)}$항으로 바꾸면, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ 구간의 SDP경로 적분은 $0 \leq \theta \leq \pi$ 구간의 적분과 같음을 보일 수 있다. 따라서, (12g)식의 결과와 합하여 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (전 구간)에서 적용할 수 있는 다음 적분 $I_{px}(\rho,\theta)$를 얻는다.

$$I_{px}(\rho,\theta) = W_\theta(0,\theta_i)u^i - u_{g1} + \frac{i}{4\pi}T_x(\theta_i)\int_{SDP} dw \frac{\sin w + \sqrt{\varepsilon_r - \cos^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\cos w - \cos\theta_i)} e^{ik_1\rho\cos(w-\theta)}. \tag{13b}$$

여기서, u^i와 u_{g1}는, 각각, 식 (1b), (7a)와 같다.

비슷한 방법을 사용하여, pole의 기여를 얻고, 복소수 w-평면의 적분으로 변환하여, (11c)식의 I_{py}와 (10b,c)식의 J_{px}, J_{py}를 다음과 같이 얻는다.

$$I_{py}(\rho,\theta) = W_\theta(\theta_i,\frac{\pi}{2})u^i - u_{g2} + \frac{i}{4\pi}T_y(\theta_i)\int_{SDP} dw \frac{\cos w + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\sin w - \sin\theta_i)} e^{ik_1\rho\cos(w-\theta)}, \tag{13c}$$

$$J_{px}(\rho,\theta) = u_{g3} + i\frac{T_x(\theta_i)}{4\pi}\int_{SDP} dw \frac{\sqrt{\varepsilon_r}\sin w + \sqrt{\varepsilon_r - \cos^2\theta_i}}{(\sqrt{\varepsilon_r}\cos w - \cos\theta_i)} e^{ik_2\rho\cos(w-\theta)}, \tag{13d}$$

$$J_{py}(\rho,\theta) = u_{g4} + i\frac{T_y(\theta_i)}{4\pi}\int_{SDP} dw \frac{\sqrt{\varepsilon_r}\cos w + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta_i}}{(\sqrt{\varepsilon_r}\sin w - \sin\theta_i)} e^{ik_2\rho\cos(w-\theta)}. \tag{13e}$$

이 식의 유도에, 기여한 w-평면의 pole은 $w_{p1,2} = \theta_i, \pi - \theta_i$과 $w_{p3,4} = \theta_1, \theta_2$로서, 여기서 θ_i는 입사각이며 θ_1은, $y=0$인 경계면의 입사각이 θ_i일 때, Snell 법칙을 만족하는 굴절각이며, θ_2는 $x=0$경계면의 굴절각이다. 기하광학파 u_{g2}, u_{g3}, u_{g4}는 식 (7b,c,e)에 주어졌다. $I_{px}(x,y)$와 $I_{py}(x,y)$를 (11a)식에 대입하여, $S_v + \overline{S_v}$ 영역의 물리광학 근사를, 그리고 $J_{px}(x,y)$와 $J_{py}(x,y)$를 (10a)식에 대입하여, $S_d + \overline{S_d}$ 영역의 물리광학근사를 다음과 같이 얻을 수 있다[16,17].

$$u_p(\rho,\theta)=u_{g5}(\rho,\theta)+u_{g6}(\rho,\theta)+v_1(\rho,\theta),\ \text{in } S_v+\overline{S_v}, \tag{14a}$$
$$u_p(\rho,\theta)=u_{g3}(\rho,\theta)+u_{g4}(\rho,\theta)+v_2(\rho,\theta),\ \text{in } S_d+\overline{S_d}, \tag{14b}$$

이 식의 유도과정에서 보여준 바와 같이, 기하광학파는 실공간($S_{v,}\ S_d$)에만 존재하는 반면, 물리 광학 근사로 얻은 모서리 회절파 $v_1(\rho,\theta)$과 $v_2(\rho,\theta)$는, 각각, 공기로 채워진 공간($S_v+\overline{S_v}$)과 유전체로 채워진 공간 ($S_d+\overline{S_d}$)에서 존재한다. ($S_{v,}\ S_d$)의 실 공간에 주어진 기하광학 해인 반사파와 굴절파는 경계조건을 만족하지만, 가상공간($\overline{S_{v,}}\ \overline{S_d}$)에는 기하광학 항은 없으며, 경계조건을 만족하지 않는, 모서리 회절파 항(v_1, v_2) 만이 존재한다[15,17-21].

$v_1(\rho,\theta)$과 $v_2(\rho,\theta)$는 Sommerfeld의 SDP경로 적분으로, (13b,c)식의 $I_{px}(x,y)$와 $I_{py}(x,y)$의 SDP경로 적분을 합하고, (13d,e)식의 $J_{px}(x,y)$와 $J_{py}(x,y)$의 SDP 적분을 합하여 다음을 얻는다.

$$v_{1,2}(\rho,\theta)=\mp\frac{i}{4\pi}\int_{SDP} dw f_{1,2}(w;\theta_i)e^{ik_{1,2}\rho\cos(w-\theta)},\ \text{in } (S_v+\overline{S_v}),(S_d+\overline{S_d}), \tag{15a,b}$$

$$f_1(w;\theta_i)=T_x(\theta_i)\frac{\sin w+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\cos w-\cos\theta_i)}+T_y(\theta_i)\frac{\cos w+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\sin w-\sin\theta_i)}, \tag{15c}$$
$$f_2(w;\theta_i)=T_x(\theta_i)\frac{\sqrt{\varepsilon_r}\sin w+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}}{(\sqrt{\varepsilon_r}\cos w-\cos\theta_i)}+T_y(\theta_i)\frac{\sqrt{\varepsilon_r}\cos w+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}{(\sqrt{\varepsilon_r}\sin w-\sin\theta_i)}, \tag{15d}$$

경계면 투과계수 $T_x(\theta_i)$와 $T_y(\theta_i)$는 식 (8b,d)에 주어졌다. $v_1(\rho,\theta)$과 $v_2(\rho,\theta)$는 $k_1\rho$가 점근적으로 큰 값인 영역에서, (15a,b)식의 SDP경로 적분은 다음의 안장점 기여로 근사시킬 수 있다[25].

$$v_{1,2}(\rho,\theta)=\mp\frac{i}{4\pi}\int_{SDP} dw f_{1,2}(w;\theta_i)e^{ik_{1,2}\rho\cos(w-\theta)} \sim \mp\frac{1}{2}f_{1,2}(\theta;\theta_i)\frac{e^{ik_{1,2}\rho+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k_{1,2}\rho}}\left[1+O(\frac{1}{k_{1,2}\rho})\right]. \tag{16a,b}$$

위의 점근적인 식은 유전체 쐐기 모서리에서 발생한 원통파로서, 그 회절 패턴은, (15c,d)식에 정의한 함수 $f_{1,2}(w;\theta_i)$의 w 값으로 θ를 넣은 $f_{1,2}(\theta;\theta_i)$이다. (16a,b)식의 $O(\frac{1}{k\rho})$항은 $\frac{1}{k\rho}$의 다음 차수 항으로 작은 수가 되며, 1에 비해 무

시할 수 있다는 의미이다.

Ⅳ. 쐐기 모서리 부근의 발산하는 전장

유전체 쐐기가 존재하는 정 전자장의 해석해는 알려져 있다[26]. $\epsilon_r > 1, \theta_d < \pi$의 예각 유전체 쐐기에서, 모서리 부근에서 발산하는 전장은 정전 전위가 대칭모드로 최소의 고유값(ν_1)을 가질 때 일어나며, 유전체 내외의 정전 전장($\mathbf{E}_{s1}, \mathbf{E}_{s2}$)은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{E}_{s1}(\rho,\theta) = -a_1\nu_1\rho^{\nu_1-1}\{\boldsymbol{\rho}_0\cos[\nu_1\theta_1] - \boldsymbol{\theta}_0\sin[\nu_1\theta_1]\},\ \theta_1 = (\theta-\pi-\frac{\theta_d}{2}),\ \text{in } S_\nu, \tag{17a,b}$$

$$\mathbf{E}_{s2}(\rho,\theta) = -a_1\nu_1\rho^{\nu_1-1}\frac{\cos[\nu_1(\pi-\theta_d/2)]}{\cos(\nu_1\theta_d/2)}\{\boldsymbol{\rho}_0\cos[\nu_1\theta_2] - \boldsymbol{\theta}_0\sin[\nu_1\theta_2]\},\ \theta_2 = (\theta-\frac{\theta_d}{2}),\ \text{in } S_d. \tag{17c,d}$$

여기서, a_1은 임의의 상수이며, 경계면 조건인 접선 성분 전장이 연속이 되도록 상수를 곱해주었으며, 경계 면의 수직 성분 전속이 연속이라는 경계면 조건은,

$$\sin[\nu_1(\theta-\pi-\theta_d/2)]_{\theta=2\pi,\theta_d} = \varepsilon_r\frac{\cos[\nu_1(\pi-\theta_d/2)]}{\cos(\nu_1\theta_d/2)}\sin[\nu_1(\theta-\theta_d/2)]_{\theta=0,\theta_d}, \tag{17e}$$

이며, 여기에 유전체 경계면 $\theta = 0, \theta_d$를 대입하면, ν_1이 만족하는 다음을 얻는다.

$$\varepsilon_r\tan\left[\nu_1\frac{\theta_d}{2}\right] = -\tan\left[\nu_1(\pi-\frac{\theta_d}{2})\right]. \tag{17f}$$

예각 유전체 쐐기($\varepsilon_r > 1, \theta_d < \pi$)에서 위 식을 만족하는 가장 작은 고유값 ν_1은 항상 전위의 대칭모드 값으로, 1보다 작은 값($0 < \nu_1 < 1$)이 되어, 이 고유값을 가지는 (17a,c)식의 정전 전장 모드가 $\rho = 0$점에서 발산하는 특이점을 갖게 된다.

Helmholtz 방정식을 만족하고, 모서리($\rho = 0$)에서 발산하는 전장을 주는 자장 $\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{z}_0 u(\boldsymbol{\rho})$은, 모서리 부근에서($\rho \simeq 0$), 정전 전장의 고유값 ν_1에 작은 변수, Δ_1, Δ_2를, 더하거나 빼서, 다음 근사식으로 얻을 수 있다.

$$u(\boldsymbol{\rho}) \simeq \begin{cases} u_{qs1}(\boldsymbol{\rho}) = C\rho^{\nu_1(1-\Delta_1)} \sin\left[\nu_1(1+\Delta_1)(\theta-\pi-\theta_d/2)\right], \Delta_1 < 1, \text{ in } S_v, & \text{(18a,b)} \\ u_{qs2}(\boldsymbol{\rho}) = D\rho^{\nu_1(1-\Delta_2)} \sin\left[\nu_1(1+\Delta_2)(\theta-\theta_d/2)\right], \Delta_2 < 1, \text{ in } S_d, & \text{(18c,d)} \end{cases}$$

여기서 $u_{qs1,2}(\boldsymbol{\rho})$는 모서리 부근의 준 정전(quasi-static) 자장이라는 의미로 사용하였으며, 첨자 1, 2는 공기영역과 유전체 영역을 의미한다. *C*, *D*는 임의의 상수로 경계조건을 사용하여 한 개의 상수를 제거할 수 있다. 식 (18a,c)를 Helmholtz 방정식에 대입하면, 작은 변수 $\Delta_{1,2}$에 대한 분산식 (19d,e)를 얻을 수 있다.

$$\left(\nabla^2 + k_{1,2}^2\right)u_{qs1,2}(\boldsymbol{\rho}) = 0,\ \nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\ \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0, \qquad \text{(19a,b,c)}$$

$$\nu_1^2\left[1-2\Delta_1+\Delta_1^2\right] - \nu_1^2\left[1+2\Delta_1+\Delta_1^2\right] + k_1^2\rho^2 = 0, \text{ in } S_v, \qquad \text{(19d)}$$

$$\nu_1^2\left[1-2\Delta_2+\Delta_2^2\right] - \nu_1^2\left[1+2\Delta_2+\Delta_2^2\right] + k_2^2\rho^2 = 0, \text{ in } S_d, \qquad \text{(19e)}$$

여기서, $\left(\frac{\partial\,\Delta_{1,2}}{\partial\,\rho}\right)_{(\rho\to 0)} = 0$을 가정하였으며, $\Delta_{1,2}$의 1차 항까지만 유지하여,

$$\Delta_1 = \left(\frac{k_1\rho}{2\nu_1}\right)^2,\ \Delta_2 = \left(\frac{k_2\rho}{2\nu_1}\right)^2, \qquad \text{(19f,g)}$$

$$k_{1,2}\rho < 2\nu_1 \text{ or } \left(\frac{\rho}{\lambda_{1,2}}\right) < \frac{\nu_1}{\pi}, \text{ for } \Delta_{1,2} < 1, \qquad \text{(19h,i,j)}$$

을 얻는다. 여기서 λ_1과 λ_2는, 각각, 공기와 유전체 매질에서의 파장이다. (19h,i) 식의 근사 범위는 ρ가 파장의 ν_1/π이내로서 파장보다 훨씬 짧다.

(18)식의 준 정전 자장 $u_{qs1}(\boldsymbol{\rho})$로부터 준 정전 전장 $\mathbf{E}_{qs1,2}(\boldsymbol{\rho})$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{E}_{qs1}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{iC}{\omega\varepsilon_0}\rho^{\nu_1(1-\Delta_1)-1}\left\{\boldsymbol{\rho}_0\nu_1(1+\Delta_1)\cos\left[\nu_1(1+\Delta_1)\theta_1\right] - \boldsymbol{\theta}_0\nu_1(1-\Delta_1)\sin\left[\nu_1(1+\Delta_1)\theta_1\right]\right\}, \text{ in } S_v, \qquad \text{(20a)}$$

$$\mathbf{E}_{qs2}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{iqC}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}\rho^{\nu_1(1-\Delta_2)-1}\left\{\boldsymbol{\rho}_0\nu_1(1+\Delta_2)\cos\left[\nu_1(1+\Delta_2)\theta_2\right] - \boldsymbol{\theta}_0\nu_1(1-\Delta_2)\sin\left[\nu_1(1+\Delta_2)\theta_2\right]\right\},$$
$$\text{in } S_d. \qquad \text{(20b)}$$

여기서 q는 유전체 경계면 $\theta = 2\pi,\ \theta_d$에서 $u_{qs1}(\boldsymbol{\rho})$과 $u_{qs2}(\boldsymbol{\rho})$이 연속인 조건에서,

$$q = -\rho^{\nu_1(\Delta_2 - \Delta_1)} \sin\left[\nu_1(1+\Delta_1)(\pi - \theta_d / 2)\right] / \sin\left[\nu_1(1+\Delta_2)\theta_d / 2\right], \tag{20c}$$

을 얻는다. 이 조건은 $\mathbf{z_0}$성분의 준 정전 자장이 연속이라는 조건을 만족한다. 경계면 접선 성분인, $\boldsymbol{\rho_0}$성분의 준 정전 전장이 연속이라는 조건은 다음 식을 준다.

$$\boldsymbol{\rho_0} \cdot \left[\mathbf{E}_{qs1}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{E}_{qs2}(\boldsymbol{\rho})\right] = iC\rho^{\nu_1(1-\Delta_2)-1} \frac{\nu_1(1+\Delta_1)(1+\Delta_2)}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r} \cot\left[\nu_1(1+\Delta_1)\theta_d / 2)\right]$$

$$\cos\left[\nu_1(1+\Delta_1)(\pi - \theta_d / 2)\right] I_{e12}, \tag{21a}$$

$$I_{e12} = \frac{\varepsilon_r}{(1+\Delta_2)} \tan\left[\nu_1(1+\Delta_2)\theta_d / 2\right] + \frac{1}{(1+\Delta_1)} \tan\left[\nu_1(1+\Delta_1)(\pi - \theta_d / 2)\right] = 0. \tag{21b}$$

여기서, 경계면의 접선성분 전장이 연속이려면, (21b)식의 I_{e12}가 영이 되어야 한다. $\rho = 0$의 모서리에서는, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$이 되어 정전 전자장에 대한 고유값을 구하는 식 (17f)와 같아져, (21b)식을 만족하며, 경계조건이 만족된다. 모서리 부근에서, (21)식이 영이 안 되는 것은, (18)식과 (20)식으로 주어진 준 정전 전자장이 근사적으로 경계조건을 만족하는 정도를 보여준다. 경계조건을 만족시키는 정전 전자장은 소멸정리를 만족시킨다. 또한, $0 < \nu_1 < 1.0$이며, $\Delta_{1,2} < 1.0$임으로, (20a,b)식의 전장이 $\rho = 0$ 부근에서, 발산하는 지배적인 기여를 하게 된다.

(18)식과 (20)식으로 주어진 전자장의 임의 상수 C 는, 유전체 쐐기의 상대유전율 ε_r를 극한인 ∞로 취하면, 알려진 도체쐐기의 발산하는 고유함수 성분의 전개 상수로부터 구할 수 있다. H-분극시 단위 선전류에 의한 도체쐐기의 산란 자장은 알려져 있으며, 전원점, ρ'을 ∞로 놓고, 입사 원통파를 평면파로 정규화 시키고, 그림 1의 유전체 영역 S_d의 경계면 C_2로부터 시계반대방향으로 측정하는 각 ϕ와, 다음과 같은 공기매질의 쐐기각 α_v를 사용하여,

$$\phi = \theta - \theta_d,\ \ \alpha_v = 2\pi - \theta_d, \tag{22a,b}$$

를 취하면, 평면파 입사시 도체쐐기의 산란 자장 $u_c^h(\rho,\phi)$을 다음과 같이 얻는다 [25,27].

$$u_c^h(\rho,\phi)=\frac{4\pi}{\alpha_v}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi}{\alpha_v}\phi)\cos(\frac{n\pi}{\alpha_v}\phi')J_{\frac{n\pi}{\alpha_v}}(k_1\rho)e^{-i\frac{n\pi}{\alpha_v}\frac{\pi}{2}}+\frac{2\pi}{\alpha_v}J_0(k_1\rho)\quad \text{for } \mathbf{H}^i=\mathbf{z}_0u^i. \tag{22c}$$

이 자장으로부터 Maxwell방정식 $\mathbf{E}_1=\frac{i}{\omega\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{\rho}_0\frac{\partial u_c^h}{\rho\partial\phi}-\boldsymbol{\theta}_0\frac{\partial u_c^h}{\partial\rho}\right)$을 사용하여, 공기매질 내의 전장을 구한다. 모서리에서 발산하는 전장은, 식 (22c)에서, $n=1$의 고유함수 성분임을 보일 수 있다. 따라서, 발산하는 고유함수의 전장을 만드는 자장은 $n=0$항과 $n=1$항의 고유함수를 합하여 쓸 수 있다. 이때의 자장을 $u_{c01}^h(\rho,\phi)$라 하면, 이를 미분한 $\rho=0$에서 발산하는 전장 $\mathbf{E}_{c01}^h(\rho,\phi)$을 다음과 같이 얻는다[27].

$$u_{c01}^h(\rho,\phi)=\sum_{n=0}^{1}u_c^h(\rho,\phi;n)=\frac{2\pi}{\alpha_v}J_0(k_1\rho)+\frac{4\pi}{\alpha_v}\cos(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi)\cos(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi')J_{\frac{\pi}{\alpha_v}}(k_1\rho)e^{-i\frac{\pi^2}{2\alpha_v}}, \tag{23a}$$

$$\mathbf{E}_{c01}^h(\rho,\phi)=i\frac{4\pi k_1}{\alpha_v\omega\varepsilon_0}\frac{\pi}{\alpha_v}\frac{1}{\rho}J_{\frac{\pi}{\alpha_v}}(k_1\rho)\cos(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi')\left\{\boldsymbol{\rho}_0\sin(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi)+\boldsymbol{\theta}_0\cos(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi)\right\}. \tag{23b}$$

모서리에서 가까운 거리의 전장을, $\rho=0$에서 $(k_1\rho)^{\frac{\pi}{\alpha_v}-1}$로 발산하는 차수로 근사하여, 이 자장에 해당하는 전장 $\mathbf{E}_c^h(\rho,\theta)$는 다음과 같은 점근식으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{E}_c^h(\rho,\phi)\simeq\mathbf{E}_{c01}^h(\rho,\phi)\sim b_c\left(k_1\rho\right)^{\frac{\pi}{\alpha_v}-1}\cos(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi')\left(\boldsymbol{\rho}_0\sin(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi)+\boldsymbol{\theta}_0\cos(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi)\right), \tag{23c}$$

$$b_c=2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{e}{2\pi}\right)^{\frac{\pi}{\alpha_v}}e^{-i\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{\alpha_v}+1)}(\alpha_v)^{\frac{\pi}{\alpha_v}-\frac{3}{2}}\ \text{for } k_1\rho\ll 1. \tag{23d}$$

여기서, Bessel 함수의 미분 및 작은 $k_1\rho$값에 대한 다음 관계식을 사용하였다.

$$\frac{n}{z}J_n(z)-\frac{d}{dz}J_n(z)=J_{n+1}(z),\ \lim_{k_1\rho\to 0}J_0(k_1\rho)\sim 1, \tag{24a,b}$$

$$\lim_{k_1\rho\to 0}J_{\frac{\pi}{\alpha_v}}(k_1\rho)\sim\frac{\sqrt{\alpha_v}}{\pi\sqrt{2}}(\frac{\alpha_v e}{2\pi})^{\frac{\pi}{\alpha_v}}(k_1\rho)^{\frac{\pi}{\alpha_v}},\ \frac{\pi}{\alpha_v}\gg k_1\rho,\ \left|\arg\frac{\pi}{\alpha_v}\right|<\pi. \tag{24c,d,e}$$

(20)식으로 주어지는 유전체 쐐기의 준 정전 전장을 도체쐐기의 발산하는 전장과 비교하기 위하여, 유전체 쐐기의 상대유전율 $\varepsilon_r\to\infty$로 취한 준 정전 전자장을

구한다. 준 정전 자장의 고유값은, $\varepsilon_r \to \infty$의 한계값에서, 식 (21b)의 둘째항과 세 번째 항은 ∞가 되어야 함으로, 이 항의 분모인 $\cos[\nu_1(1+\Delta_1)(\pi-\theta_d/2)]=0$ 또는 $\nu_1(1+\Delta_1)(\pi-\theta_d)=\pi/2$로 $\nu_1(1+\Delta_1)=\pi/\alpha_v$를 얻는다 이 고유값은 도체쐐기의 전장이 발산하는 고유값과 같다. 정전 전자장의 최소 고유값 ν_1도 같은 이유로 $\varepsilon_r \to \infty$일 때, 식 (17f)로부터 $\nu_1 = \pi/\alpha_v$가 됨을 알 수 있다. 따라서, $\varepsilon_r \to \infty$이면, $\nu_1(1\pm\Delta_1)=\pi/\alpha_v$이 된다. 유전체쐐기의 준 정전 전자장에 사용한 임의의 상수 C를 다음과 같이, $k_1\rho$로 정규화 한 상수 C_d로 표시하여, 전자장을 ρ 대신 $k_1\rho$의 함수로 표현하면, (18a)식은

$$u_{qs1}(\boldsymbol{\rho}) = (k_1\rho)^{\nu_1(1-\Delta_1)} C_d \sin[\nu_1(1+\Delta_1)\theta_1], \tag{25a}$$
$$C = (k_1)^{\nu_1(1-\Delta_1)} C_d, \tag{25b}$$

라 쓸 수 있다. 도체쐐기 한계 고유치 $\nu_1(1\pm\Delta_1)=\pi/\alpha_v$를 (20a)식에 대입하여, 모서리에서 발산하는 전장을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\left[\mathbf{E}_{qs1}(\boldsymbol{\rho})\right]_{\nu_1(1\mp\Delta_1)\to\frac{\pi}{\alpha_v}} = iC_d\left(k_1\rho\right)^{\frac{\pi}{\alpha_v}-1}\eta_0\left\{\boldsymbol{\rho}_0\frac{\pi}{\alpha_v}\cos\left[\frac{\pi}{\alpha_v}\theta_1\right]-\boldsymbol{\theta}_0\frac{\pi}{\alpha_v}\sin\left[\frac{\pi}{\alpha_v}\theta_1\right]\right\}, \tag{25c}$$
$$\eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0},\ \left(k_1\rho\right)^{\frac{\pi}{\alpha_v}}C_d=\left(\rho\right)^{\frac{\pi}{\alpha_v}}C,\ \theta_1=\theta-\theta_d-\frac{\alpha_v}{2}=\phi-\frac{\alpha_v}{2}. \tag{25d,e,f}$$

도체쐐기의 극한 식 (25c)에 $\cos\left[\frac{\pi}{\alpha_v}\theta_1\right]=\sin\left(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi\right)$, $\sin\left[\frac{\pi}{\alpha_v}\theta_1\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi\right)$를 대입하고, 도체쐐기의 식 (23b,c,d)와 같이 놓으면, C_d를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$C_d=-2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi^2}{2\alpha_v}}\left(\frac{e}{2\pi}\right)^{\frac{\pi}{\alpha_v}}\left(\alpha_v\right)^{\frac{\pi}{\alpha_v}-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha_v}\phi'\right),\ \phi'=\theta'-\theta_d. \tag{25g,h}$$

여기서, 전장점 (ρ, θ)의 θ와 전원점 (ρ', θ')의 θ'을 사용하거나, $\phi=\alpha_v/2$(대칭면)을 정의하는 좌표계의 ϕ, ϕ'를 사용할 수도 있다.

(25g)식의 C_d와 (20c)식의 q를 (20a,b)식에 대입하면, 모서리부근 유전체 쐐기 안과 밖에서 발산하는 전장을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{E}_{qs1}(\boldsymbol{\rho}) = i\left(k_1\rho\right)^{\nu_1(1-\Delta_1)-1} C_d\eta_0\nu_1 \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\rho}_0(1+\Delta_1)\cos\left[\nu_1(1+\Delta_1)\theta_1\right] \\ -\boldsymbol{\theta}_0(1-\Delta_1)\sin\left[\nu_1(1+\Delta_1)\theta_1\right] \end{Bmatrix}, \text{ in } S_v, \tag{26a}$$

$$\mathbf{E}_{qs2}(\boldsymbol{\rho}) = i\left(k_1\rho\right)^{\nu_1(1-\Delta_1)-1} C_d\eta_0\nu_1 \frac{\sin\left[\nu_1(1+\Delta_1)(\pi-\theta_d/2)\right]}{\varepsilon_r\sin\left[\nu_1(1+\Delta_2)\theta_d/2\right]} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\rho}_0(1+\Delta_2)\cos\left[\nu_1(1+\Delta_2)\theta_2\right] \\ -\boldsymbol{\theta}_0(1-\Delta_2)\sin\left[\nu_1(1+\Delta_2)\theta_2\right] \end{Bmatrix},$$

$$\text{in } S_d. \tag{26b}$$

위의 준 정전 전장은 모서리 조건과 유전체 경계면 접선 성분이 연속이라는 조건을, 식 (21b)를 근사적으로 만족시킴으로서, 만족한다. 전장의 진폭은 $(k_1\rho)^{-1+\nu_1(1-\Delta_1)}$로 급격하게 감소하며, 수치계산으로 얻은 결과[21]와 비교할 수 있을 것이다. 그 감쇄 속도는 정전장의 감쇄보다 크다. C_d가 주어졌으므로, 모서리에서 발산하는 전장이 기하광학파와 진폭이 비슷해지는 영역도 계산할 수 있을 것이다. 발산하는 전장은 H-분극일 때이며, 전위의 대칭모드로 고유값이 가장 낮은 한 개의 모드($0 < \nu_1 < 1.0$)에서만 일어나며, E-분극이거나, H-분극의 모든 비 대칭 모드를 포함한 다른 모드에서서는 일어나지 않는다.

V. 물리 광학 해의 교정

기하광학 해를 경계면 자장으로 사용하여, (5c,d)식에 대입하면, 물리광학근사의 $P_p(\alpha,\beta)$와 $Q_p(\alpha,\beta)$를 식 (9a,b)와 같이 구할 수 있다. 교정항을 $P_c(\alpha,\beta)$와 $Q_c(\alpha,\beta)$라 할 때, $P_p(\alpha,\beta)$와 $Q_p(\alpha,\beta)$에 더하여, 정확한 $P(\alpha,\beta)$와 $Q(\alpha,\beta)$를 다음과 같이

$$P(\alpha,\beta) = P_p(\alpha,\beta) + P_c(\alpha,\beta),\ Q(\alpha,\beta) = Q_p(\alpha,\beta) + Q_c(\alpha,\beta). \tag{27a,b}$$

정의하여, 소멸정리 식 (5b)와 (6b)에 대입하면, 교정항 $P_c(\alpha,\beta)$와 $Q_c(\alpha,\beta)$를 아는 $P_p(\alpha,\beta)$와 $Q_p(\alpha,\beta)$의 역 Fourier변환으로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$F^{-1}\left[-\frac{P_c(\alpha,\beta)+Q_c(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\right] = F^{-1}\left[\frac{P_p(\alpha,\beta)+Q_p(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\right] = -v_2(\rho,\theta), \text{ in } \overline{S_d}, \tag{28a}$$

$$F^{-1}\left[\frac{P_c(\alpha,\beta)+Q_c(\alpha,\beta)/\varepsilon_r}{\alpha^2+\beta^2-k_1^2}\right]=-u_i(x,y)-F^{-1}\left[\frac{P_p(\alpha,\beta)+Q_p(\alpha,\beta)/\varepsilon_r}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\right]=-v_1(\rho,\theta),\ \text{in}\ \overline{S_v}. \tag{28b}$$

여기서, 아래 첨자 c, p는, 각각, 교정항과 물리광학 근사항을 의미하며, (14a,b)식의 결과로 알 수 있듯이, 가상공간 $\overline{S_v}$와 $\overline{S_d}$에서 물리광학 모서리 회절파 $v_2(\rho,\theta)$와 $v_1(\rho,\theta)$만이 존재함을 이용하였다.

가상공간, $\overline{S_v}$와 $\overline{S_d}$에서 각각의 점근적인 원통파, $v_1(\rho,\theta)$과 $v_2(\rho,\theta)$를 제거할 수 있는 등가 전원 분포 u_c를 찾기 위하여, 쐐기 모서리점에 다중극 선전원을 가정하거나[16], 경계면에 전기 면전류 또는 자기 면전류를 가정하여[17,18] 그 전개상수를 수치계산으로 얻었다. 여기서는 $\overline{S_d}$영역에서 교정한 자장에 $v_2(\rho,\theta)$를 더한 자장을 영으로 만들고, $\overline{S_v}$영역에서 교정한 자장에 $v_1(\rho,\theta)$을 더한 자장을 영으로 만들 수 있는 교정자장 전원을, $v_2(\rho,\theta)$의 점근적인 결과식 (16b)의 $f_2(\theta;\theta_i)$ 대신 구하려는 회절 패턴 $g(\theta)$를 곱한 $u_c(\rho,\theta)$를 다음과 같이 놓고, 소멸정리를 이용하여 $g(\theta)$를 구하려 한다. 즉,

$$u_c(\rho,\theta)\sim-\frac{e^{ik_2\rho+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k_2\rho}}\left[\delta_0+\delta_{\theta_d}\right]g(\theta), \tag{28}$$

여기서 δ_γ는, 그림 4에 보인바와 같이, 경계면 $\theta=\gamma$ 위에서 1이며, 그 외의 위치에서는 영인 면 전류를 의미하며, $g(\theta)$는 두개의 경계면 면 전류를 합한 모서리 점의 회절 패턴 함수로, 구하려는 미지 함수이다.

경계면 교정 자장 (28)식을 식 (5c,d)에 대입하여 교정 스펙트럼, P_c와 Q_c를 얻은 후, 이를 식 (5a)와 (6a)에 대입하여 $\overline{S_d}$와 $\overline{S_v}$영역에서 소멸정리를 만족하는 교정 자장을 얻어, 식 (28)의 회절 패턴 $g(\theta)$를 구한다. 교정 자장의 회절 패턴을, 일반성을 가지면서, 얻는 과정을 간단히 보여주기 위하여, 직각 유전체 쐐기 $(\theta_d=\pi/2)$의 예를 들려 한다. (28)식과 $\theta_d=\pi/2$를 식 (5c,d)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$P_c(\alpha,\beta)=i\beta\int_0^\infty dx u_c(x,0)e^{-i\alpha x}+i\alpha\int_0^\infty dy u_c(0,y)e^{-i\beta y}, \tag{29a}$$

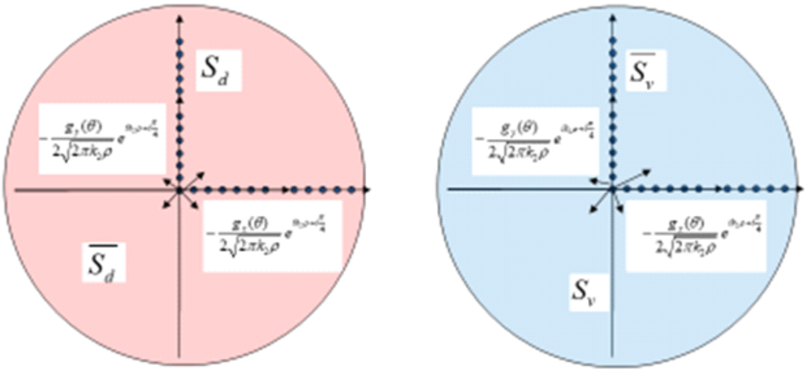
$$Q_c(\alpha,\beta)=\int_0^\infty dx\frac{\partial u_c(x,0)}{\partial y}e^{-i\alpha x}+\int_0^\infty dy\frac{\partial u_c(0,y)}{\partial x}e^{-i\beta y}, \tag{29b}$$

$$\frac{\partial u_c(x,0)}{\partial y}=\frac{\partial u_c(\rho,0)}{\rho\partial\theta},\quad \frac{\partial u_c(0,y)}{\partial x}=-\frac{\partial u_c(\rho,\pi/2)}{\rho\partial\theta}. \tag{29c,d}$$

(28)식으로 가정한 u_c가 (16a,b)식인 점근적인 자장의 표현식임을 고려하여, 편미분 항은, $k_2\rho$의 점근적인 차수 급수로 지배적인 항 $(1/\sqrt{k_2\rho})$까지 계산하고 그 이상의 차수 항은 무시하여, 다음을 얻는다.

$$P_c(\alpha,\beta)=\frac{g(\theta)}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{k_2(k_2-\alpha)}}+\frac{\alpha}{\sqrt{k_2(k_2-\beta)}}\right\},\ Q_c(\alpha,\beta)\sim 0. \tag{30a,b}$$

여기서, $\dfrac{\partial\, u_c(x,0)}{\partial\, y}$항과 $\dfrac{\partial\, u_c(0,y)}{\partial\, x}$항은 높은 차수 항으로 무시하였으며, $\int_0^\infty dx$ 적분항은 $\gamma=k_2-\alpha$를 사용한 부분적분을, 그리고 감마함수 $\Gamma(z)$로 다음 정의를 사용하였다.



(a) (b)

그림 4. 유전체 경계면의 모서리 회절 패턴 $g(\theta)$를 가진 교정 자장. (a) $S_d+\overline{S_d}$ 공간의 교정자장, (b) $S_v+\overline{S_v}$ 공간의 교정자장.

$$-\frac{i\beta g(\theta)}{2\sqrt{2\pi k_2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty d\rho\frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{i(k_2-\alpha)\rho}=-\frac{i\beta g(\theta)}{2\sqrt{2\pi k_2}}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{g(\theta)}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\frac{3}{2})\frac{\beta}{\sqrt{k_2(k_2-\alpha)}},\quad (30c)$$

$$\int_0^\infty dx\frac{e^{i\gamma x}}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}e^{i\gamma x}\right]_0^\infty-2i\gamma\int_0^\infty dx\sqrt{x}e^{i\gamma x}=-2i\gamma\int_0^\infty dx\sqrt{x}e^{i\gamma x}=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\Gamma(\frac{3}{2}),\quad (30d)$$

$$t=-i\gamma x,\ dx=\frac{dt}{-i\gamma},\ \sqrt{x}=\sqrt{\frac{it}{\gamma}},\ \gamma=k_2-\alpha,\ \mathrm{Im}(k_2)>0,\quad (30e,f,g,h,i)$$

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\ \Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\quad (30j,k)$$

식 (30a,b)를 (27a,b)식에 대입하여 교정 자장 $u_{c1,2}(\rho,\theta)$를 다음과 같이 구한다.

$$u_{c2}(\rho,\theta)=F^{-1}\left[-\frac{P_c(\alpha,\beta)+Q_c(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\right]\square -F^{-1}\left[\frac{P_c(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\right],\quad (31a)$$

$$u_{c1}(\rho,\theta)=F^{-1}\left[\frac{P_c(\alpha,\beta)+Q_c(\alpha,\beta)/\varepsilon_r}{\alpha^2+\beta^2-k_1^2}\right]\square\ F^{-1}\left[\frac{P_c(\alpha,\beta)}{\alpha^2+\beta^2-k_1^2}\right].\quad (31b)$$

여기서 $P_c(\alpha,\beta)$는 식 (30a)로 주어진다.

식 (12c,d)의 적분 $I_{px}(\rho,\theta)$의 유도과정으로 보인바와 같이, u_{c2}에 대한 식 (30a)와 (31a)의 pole $\beta_{p1,2}=\pm\sqrt{k_2^2-\alpha^2}$의 적분은, 그림 3(a)의 β-평면에서, $y>0$에서는 리만 위-반평면을 둘러싸는 적분 경로로 얻으며, $y<0$에서는 리만 아래-반평면을 둘러싸는 적분 경로로 적분하며, α 적분은 변환 $\alpha=k_2\cos w$, $d\alpha=-k_2\sin w dw$을 사용하여, w-평면 적분으로 $y\geq 0$영역에서 다음을 얻는다.

$$u_{c2}(\rho,\theta)=\frac{g(\theta)}{2\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\frac{e^{i(\alpha x+\beta y)}}{\alpha^2+\beta^2-k_2^2}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{k_2(k_2-\alpha)}}+\frac{\alpha}{\sqrt{k_2(k_2-\beta)}}\right\}$$

$$=\frac{i}{4\pi}\int_P dwe^{ik_2\rho\cos(w-\theta)}\left\{\frac{\sin w}{\sqrt{1-\cos w}}+\frac{\cos w}{\sqrt{1-\sin w}}\right\},\ y\geq 0,\quad (34a)$$

여기서 다음의 관계를 사용하여 피적분 함수를 바꾸고,

$$\sin w/\sqrt{1-\cos w}=\sqrt{2}\cos(w/2),\ \cos w/\sqrt{1\mp\sin w}=\mp\sqrt{2}\cos(w/2\mp\pi/4),\quad (34b,c)$$

$$\sin w=2\sin(w/2)\cos(w/2),\ \cos w=\mp\sin(w\mp\pi/2),\ \pm\sin w=\cos(w\mp\pi/2),\quad (34d,e,f)$$

$$\sqrt{1\mp\sin w}=\sqrt{1-\cos\left(w\mp\pi/2\right)},\ \cos w=\cos^2\left(w/2\right)-\sin^2\left(w/2\right)=1-2\sin^2\left(w/2\right),\ \text{(34g,h)}$$

(34a)식의 적분 경로 P를 따른 적분은 특이점이 없으므로, 점근적으로 안장점을 통과하는 SDP 경로 적분으로 바꾸어, 다음을 구할 수 있다.

$$u_{c2}(\rho,\theta)\sim\frac{g(\theta)}{2\sqrt{2}}\frac{e^{ik_2\rho+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k_2\rho}}f_{c2}(\theta)\left[1+O(\frac{1}{k_2\rho})\right],\tag{35a}$$

$$f_{c2}(\theta)=\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\theta}{2})-\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\right].\tag{35b}$$

$y<0$구간의 $u_{c2}(\rho,\theta)$는 (12d)식의 적분을 점근식으로 유도했던 다음 변환,

$$\hat{w}=2\pi-w,\ \cos(w+\theta)=\cos(\hat{w}-\theta),\tag{35c,d}$$

$$\cos\frac{w}{2}=-\cos\frac{\hat{w}}{2},\ \cos\left(\frac{w}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\hat{w}}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\tag{35e,f}$$

을 사용하면, $y\geq 0$영역의 $u_{c2}(\rho,\ \theta)$와 같음을 보일 수 있다. 따라서 점근식 (35a,b)의 $u_{c2}(\rho,\ \theta)$는, 전 구간($0\leq\theta\leq 2\pi$)에서 사용 가능한 점근식이다.

경계면 교정 자장이 (30)식으로 주어지면, $S_v+\overline{S_v}$ 공간의 자장 $u_{c1}(\rho,\theta)$은 (6a)식에 $u^i(\rho,\theta)=0$을 대입하여 다음과 같이 구한다.

$$u_{c1}(\rho,\theta)\sim\frac{-g(\theta)}{2\sqrt{2}}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\frac{e^{i(\alpha x+\beta y)}}{(\alpha^2+\beta^2-k_1^2)}\left\{\frac{\beta}{\sqrt{k_2(k_2-\alpha)}}+\frac{\alpha}{\sqrt{k_2(k_2-\beta)}}\right\}$$

$$=\frac{-ig(\theta)}{2\sqrt{2}(4\pi)}\int_P dw e^{ik_1\rho\cos(w-\theta)}\left\{\frac{\pm\sin w}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_r}\mp\cos w)}}+\frac{\cos w}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_r}\mp\sin w)}}\right\},\ y\begin{smallmatrix}\geq\\ <\end{smallmatrix}0.\tag{36a}$$

앞의 u_{c2}에 대한 식의 유도와 같이, pole $\beta_{p1,2}=\pm\sqrt{k_1^2-\alpha^2}$의 적분은, 그림 3(a)의 β-평면에서, $y>0$에서는 리만 위-반평면을, $y<0$에서는 리만 아래-반평면을 둘러싸는 적분 경로로 적분하며, $\alpha=k_1\cos w$, $\beta=k_1\sin w$, $\sqrt{k_1-\alpha}=\sqrt{k_1(1-\cos w_1)}$, $\sqrt{k_2(k_2-\alpha)}=k_1\sqrt{\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_r}-\cos w)}$, $\sqrt{k_2(k_2-\beta)}=k_1\sqrt{\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_r}-\sin w)}$로 변환하여, 다음의 안장점 기여 점근식을 얻는다.

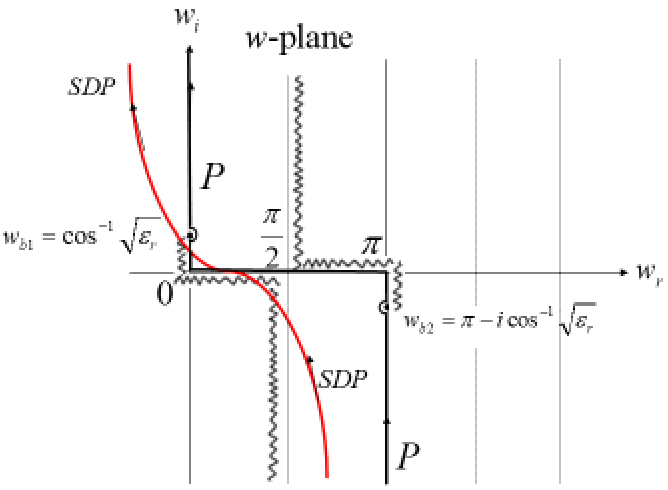


그림. 5. $\alpha = k_1 \cos w$로 변환한 w-평면의 분지선과 적분경로 P와 SDP.

$$u_{c1}(\rho,\theta) \sim -\frac{g(\theta)e^{ik_1\rho + i\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{2}\sqrt{2\pi k_1\rho}} f_{c1}(\theta)\left[1 + O(\frac{1}{k_1\rho})\right], \text{ in } (S_v + \overline{S_v}), \tag{36b}$$

$$f_{c1}(\theta) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_r} - \cos\theta)}} + \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_r} - \sin\theta)}}. \tag{36c}$$

w-평면의 분지점 $w_{b4} = \cos^{-1}\sqrt{\varepsilon_r}$과 $w_{b5} = \sin^{-1}\sqrt{\varepsilon_r}$은, 그림 5에 보인 바와 같이, 복소수 점이 되어, SDP1 경로가 분지선을 자르는 경우라도, 그 기여는 지수 함수적으로 작은 값이 되며, 안장점 기여에 비해 무시할 수 있다. 따라서, $u_{c1}(\rho, \theta)$ 은 안장점 기여의 점근식 (36b,c)로 표현된다. 앞서 보인 바와 같이, $y < 0$구간의 $u_{c1}(\rho, \theta)$는 $\hat{w} = 2\pi - w$ 변환을 사용하여 $y \geq 0$구간의 $u_{c1}(\rho, \theta)$과 같음을 보일 수 있어서, (36b,c)식은 전 구간에서 사용가능한 식이다.

가상공간인, $\overline{S_v}$와 $\overline{S_d}$ 공간에서 동시에 소멸정리를 만족하는 다음 두식,

$$u_{c1}(\rho,\theta) + v_1(\rho,\theta) = 0, \text{ in } \overline{S_v}, \; u_{c2}(\rho,\theta) + v_2(\rho,\theta) = 0, \text{ in } \overline{S_d}, \tag{37a,b}$$

에서 교정자장의 복사패턴, $g(\theta)$를 구하면, 점근적으로 경계면 조건을 만족시키는 해를 얻게 된다. 즉, (37a,b)식에 (36b,c)식의 $u_{c1}(\rho, \theta)$과 (35a,b)식의 $u_{c2}(\rho, \theta)$를 대입하고, (37a,b)식에서, 각각, 공통 원통파 함수, $e^{ik_1\rho + i\frac{\pi}{4}}/\sqrt{k_1\rho}$와

$e^{ik_2\rho + i\frac{\pi}{4}} / \sqrt{k_2\rho}$를 상쇄하여, 다음을 얻는다.

$$\frac{g(\theta)}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_r}-\cos\theta)}}+\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sqrt{\varepsilon_r}(\sqrt{\varepsilon_r}-\sin\theta)}}\right\}-f_1(\theta;\theta_i)=0,\ \text{in}\ \overline{S_v}(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}), \tag{37c}$$

$$-\frac{g(\theta)}{2}\left\{\cos(\frac{\theta}{2})-\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})\right\}+f_2(\theta;\theta_i)=0,\ \text{in}\ \overline{S_d}(\frac{\pi}{2}\le\theta\le 2\pi). \tag{37d}$$

여기서 $f_{1,2}(\theta;\theta_i)$는 w의 함수로 정의된 (15c,d)식에, w 대신 θ를 대입하여 다음을 얻는다.

$$f_1(\theta;\theta_i)=T_x(\theta_i)\frac{\sin\theta+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\cos\theta-\cos\theta_i)}+T_y(\theta_i)\frac{\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}/\varepsilon_r}{(\sin\theta-\sin\theta_i)}, \tag{37e}$$

$$f_2(\theta;\theta_i)=T_x(\theta_i)\frac{\sqrt{\varepsilon_r}\sin\theta+\sqrt{\varepsilon_r-\cos^2\theta_i}}{(\sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta-\cos\theta_i)}+T_y(\theta_i)\frac{\sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\theta_i}}{(\sqrt{\varepsilon_r}\sin\theta-\sin\theta_i)}. \tag{37f}$$

여기서 $T_x(\theta_i)$와 $T_y(\theta_i)$는 (8b,d)식에 정의한 x-축과 y-축 경계면 투과계수이다.

물리광학 모서리 회절패턴 함수, $f_1(\theta,\theta_i)$은 반사각, $2\pi-\theta_i$와 $\pi-\theta_i$에서, 그리고 $f_2(\theta,\theta_i)$는 굴절각 θ_1과 θ_2에서 발산한다. 굴절각은 $f_2(\theta,\theta_i)$의 분모를 영으로 만드는, $\sqrt{\varepsilon_r}\cos\theta_1=\cos\theta_i$과 $\sqrt{\varepsilon_r}\sin\theta_2=\sin\theta_i$의 각으로 주어진다. 그러나 이 4개의 전이각, θ_1, θ_2, $\pi-\theta_i$, $2\pi-\theta_i$에서 전자장은 유한한 값으로 연속적으로 변화한다. 전이각 부근의 자장을 균등 수렴 점근적 표현식(uniform asymptotic representation)으로 표현 할 수 있으며, 이는 Fresnel 적분[25]을 사용하여, 전이각에서 급격하게 영이 되는 기하광학파와 발산하는 물리광학 모서리 회절파를 서로 상쇄하게 하여, 유한한 자장 값으로 만드는 표현식이다. 두개의 굴절각 θ_1과 θ_2에서 균등 수렴 점근적 표현식은 다음과 같다.

$$u_{td2}(\rho,\theta)\sim\frac{1}{2}\frac{e^{ik_2\rho+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k_2\rho}}f_2(\theta,\theta_i)+u_{t,\theta_t}(\rho,\theta),\ \theta_t=\theta_1,\ \theta_2, \tag{38a,b}$$

$$u_{t,\theta_t}(\rho,\theta)=\frac{T_{x,y}(\theta_i)}{2}\mathrm{sgn}(\theta-\theta_t)\left[F(\xi)-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\xi}}\right]e^{ik_2\rho},\quad \mathrm{sgn}(\phi)=\begin{cases}-1, & \phi<0,\\ 1, & \phi>0,\end{cases} \tag{38c,d}$$

$$\xi = \sqrt{k_2\rho}\left|\sin\frac{\theta-\theta_t}{2}\right|,\ F(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-i2\xi^2}\int_{(1-i)\xi}^{\infty} e^{-x^2}dx. \qquad (38e,f)$$

여기서 $f_2(\theta,\theta_i)$는 (37f)식에 보인, $S_d+\overline{S_d}$ 영역의 물리광학 모서리 회절 패턴이며, $T_{x,y}(\theta_i)$는 두 전이각 θ_1, θ_2을 사용할 때의 x-축면과 y-축 면의 투과계수이며, $sgn(\theta)$ 함수는 식 (38d)로 정의한 부호 함수, F(ξ)는 (38f)식에 정의한 Fresnel 적분[25]이다. (38a,b)식은, 굴절각 $\theta_t=\theta_1,\theta_2$에서, (7c,e)식의 불연속적인 기하 광학파 $u_{g3,4}(\rho,\theta)$와, 이 굴절각에서 발산하는 물리광학 회절파, $v_2(\rho,\theta)$를 합할 때, 합한 전자장이, 각각의 전이각에서 유한한 값으로 균일하게 수렴하도록 하는 점근적 표현식이다. 공기매질내의 다른 전이각인 $\theta_t=\pi-\theta_i$, $2\pi-\theta_i$에서는 $u_{g1,2}(\rho,\theta)$ 와 v_1를 합할 때, 균등하게 수렴하는 표현식으로, (38a)식의 k_2를 k_1으로, $f_2(\theta,\theta_i)$을 $f_1(\theta,\theta_i)$으로 바꾸어 사용한다. 균등 표현식을 사용하는 범위는, $\xi=\sqrt{k_{1,2}\rho}|\sin\frac{\theta-\theta_t}{2}|\le 3.0$, $|\theta-\theta_t|\le\frac{6}{\sqrt{k_{1,2}\rho}}$ 일 때이며, 이 각도 밖에서는, $F(\xi)$의 점근적인 표현식을 사용하면, 물리 광학 점근식으로 돌아간다. 따라서, 이 전이각 부근의 균등 수렴 물리 광학 모서리 회절 패턴 $f_{u2}(\theta,\theta_i)$은, (38)식으로부터, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f_{u2}(\theta,\theta_i) = f_2(\theta,\theta_i) + \sqrt{2\pi k_2\rho}\,T_{x,y}(\theta_i)\,\mathrm{sgn}(\theta-\theta_t)\left(F(\xi)e^{-i\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi}\right). \qquad (38g)$$

물리 광학 모서리 회절 패턴, $f_1(\theta,\theta_i)$은 반사각, $2\pi-\theta_i$와 $\pi-\theta_i$에서 발산하지만, 같은 방법으로 비슷한 표현식 $f_{u1}(\theta,\theta_i)$을 얻을 수 있다. $f_1(\theta,\theta_i)$는 $\theta=\theta_i$에서 발산하는 것으로 보이지만, (37e)식의 두개 항을 통분한 $f_1(\theta,\theta_i)$은 분자와 분모가 동시에 영이 되므로 L'Hopital 정리를 사용하여 유한 값이 됨을 보일 수 있다.

소멸정리 식 (37c,d)에, $f_{1,2}(\theta,\theta_i)$의 발산하는 각 부근에서 균등 수렴 표현식 $f_{u1,2}(\theta,\theta_i)$을 사용하고, N개의 각, $\theta_j, j=1,\cdot\cdot N$의 값을 대입하여, 총 N개의 연립 방정식을 만들면, 미지수인 N개의 교정자장 회절 패턴 $g(\theta_j), j=1,2,\cdot\cdot N$를 점접합(point matching) 수치계산 방법으로 얻을 수 있다. 구한 N개의 회절 패턴 $g(\theta_j)$ 값을 식 (35a)와 (36b)에 대입하여, 교정 자장 $u_{c2}(\rho,\theta)$와 $u_{c1}(\rho,\theta)$을 계산할 수 있다. $g(\theta_j)$를 수치계산으로 구했다면, (25)식의 물리광학 해 $u_p(\rho,\theta)$

중 기하광학 해를 제외한 모서리 회절파 $v_{1,2}(\rho,\theta)$와, (36b,c)와 (35a,b)식의 교정자장 $u_{c1,2}(\rho,\theta)$을 합하여, 교정한 모서리회절파 $u_{d1,2}(\rho,\theta)$를 얻는다.

$$u_{d1}(\rho,\theta) \equiv v_1(\rho,\theta)+u_{c1}(\rho,\theta) \sim p_1(\theta;\theta_i)\frac{e^{ik_1\rho+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k_1\rho}}\left[1+O(\frac{1}{k_1\rho})\right],\ \text{in}\ (S_v+\overline{S_v}), \tag{39a}$$

$$u_{d2}(\rho,\theta) \equiv v_2(\rho,\theta)+u_{c2}(\rho,\theta) \sim p_2(\theta;\theta_i)\frac{e^{ik_2\rho+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k_2\rho}}\left[1+O(\frac{1}{k_2\rho})\right],\ \text{in}\ (S_d+\overline{S_d}), \tag{39b}$$

여기서 교정한 모서리 회절파 패턴 $p_{1,2}(\theta;\theta_i)$는 주어진 패턴함수, $f_{1,2}(\theta;\theta_i)$와 $f_{c1,2}(\theta)$에 수치계산으로 구한 패턴함수 $g(\theta)$를 대입하여 얻었으며, 전 영역에서 유한한 값으로 주어진다. 전이각에서 발산하는 함수 $f_{1,2}(\theta;\theta_i)$는 유한 값의 $f_{u1,2}(\theta,\theta_i)$를 사용하여 다음을 얻는다.

$$p_1(\theta;\theta_i)=\begin{cases}0,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ (\overline{S_v}), & (39c)\\ \frac{g(\theta)}{2\sqrt{2}}f_{c1}(\theta)-f_{u1}(\theta;\theta_i),\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le 2\pi\ (S_v), & (39d)\end{cases}$$

$$p_2(\theta;\theta_i)=\begin{cases}f_{u2}(\theta;\theta_i)-\frac{g(\theta)}{2\sqrt{2}}f_{c2}(\theta),\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ (S_d), & (39e)\\ 0,\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le 2\pi\ (\overline{S_d}), & (39f)\end{cases}$$

여기서,

$$f_{u1,2}(\theta;\theta_i)=\begin{cases}f_{u1,2}(\theta;\theta_i),\ \text{near the transition angles},\ \theta\approx\theta_t, & (39g)\\ f_{1,2}(\theta;\theta_i),\ \text{otherwise},\ \theta_t=\theta_1,\ \theta_2,\ \pi-\theta_i,\ 2\pi-\theta_i. & (39h,i)\end{cases}$$

$u_{d1,2}(\rho,\theta)$과 $p_{1,2}(\theta;\theta_i)$은, 각각, 공기와 유전체 매질, $S_v(\frac{\pi}{2}\le\theta\le 2\pi)$, $S_d(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$에서의 교정한 모서리 회절파와 그 회절패턴이다.

물리 광학 모서리 회절파, v_1과 v_2는, 경계면 위에서 불연속이지만, 교정한 모서리 회절파는, 소멸 정리에 의하여 경계면 위에서 $p_1(\theta_d;\theta_i)=p_2(\theta_d;\theta_i)=p_1(0;\theta_i)=p_2(0;\theta_i)=0$이 된다. 따라서 교정된 전자장의 회절파는 영이 되어 경계면에서 전

자장이 연속임을 보였다. 여기서 교정한 전자장의 모서리 회절 패턴 함수 $p_{1,2}(\theta;\theta_i)$는 식 (39d,e)에 보인 바와 같이 $g(\theta)$를 포함하며, $g(\theta)$는 수치계산으로 구한다. 경계면 교정 자장이 영이 되는 것은, 소멸정리를 만족시키는 수치계산에서 교정자장의 $1/\sqrt{k_{1,2}\rho}$차수까지의 기여를 계산하였으며, 그 이상의 차수 항은 무시하였다. 교정한 경계면 자장이 영이 된다는 것은, 그 다음 주된 기여 항으로 $1/(k_{1,2}\rho)^{1.5}$차수항의 기여를 계산하여야 할 것이며, 이 차수 항은 측면파(lateral wave)의 기여로 알려져 있다[25].

Ⅵ. 종합과 결론

유전체 쐐기에 H-분극된 평면 입사파가 들어올 때, 산란파는 다음과 같이 얻을 수 있음을 보였다.

$$u(\rho,\theta)=\begin{cases} u^i(\rho,\theta)+u_{qs1}(\boldsymbol{\rho})+u_{g1}(\rho,\theta)+u_{g2}(\rho,\theta)+u_{d1}(\rho,\theta), \ \text{in } S_v, & (40a) \\ u_{qs2}(\boldsymbol{\rho})+u_{g3}(\rho,\theta)+u_{g4}(\rho,\theta)+u_{d2}(\rho,\theta), \ \text{in } S_d. & (40b) \end{cases}$$

여기서 $u_{qs1}(\boldsymbol{\rho})$와 $u_{qs2}(\boldsymbol{\rho})$는, 각각, 공기와 유전체 매질의 준 정전 자장으로, 이 자장으로부터 얻은 전장은 모서리에서 발산하며, 고유값이 정전 자장의 고유값 ν_1에 작은 값, $\Delta_1=(k_1\rho/2\nu_1)^2$이나 $\Delta_2=(k_2\rho/2\nu_1)^2$를 더하거나 뺀 값을 사용하여 얻는다. 발산하는 고유함수의 전개 상수 C_d는 유전체 쐐기의 상대유전율을 ∞의 극한을 취하고, 식 (19f,g), (25a,g), (26a,b)에서와 같이, 도체 쐐기의 전개 상수와 비교하여 구하였다. 여기서 구한 준 정전 해는 Helmholtz 방정식과 유전체 경계면 경계 조건과 모서리 조건(edge condition)을 만족한다. $u_{gj}(\rho,\theta), j=1,2,3,4,$는 식 (7a,b,c,e)에 보인 4개의 기하 광학 파이며 $u_{d1,2}(\rho,\theta)$는, 각각, 공기와 유전체 매질로 복사하는, 교정한 모서리 회절파로서 소멸정리를 이용하여 얻었다. 기하 광학파와 교정된 모서리 회절파는 유전체 경계면 조건을 만족시킨다. 이 자장으로부터 Maxwell 방정식을 사용하여 해당하는 전장을 구하면, 식 (26a,b)에 보인 바와 같이, $n=1$모드의 전장만이 모서리($\rho=0$)에서 발산한다. H-분극의 모든 다른 모드와 E-분극의 모든 모드의 전장은 모서리에서 발산하지 않으며, 영이 되

어 기하 광학 파에 비하여 작으므로 무시할 수 있다. 발산하는 전장 모드는 모서리 부근에서 크기가 지배적이다가, ρ가 증가함에 따라 급격히 감쇄하며, 이 영역을 벗어나면, 기하 광학 파가 지배적이 된다.

소멸정리를 이용하여, $\overline{S_v}$와 $\overline{S_d}$의 가상 영역에서 자장이 영이 되도록 만들어, 교정한 모서리 회절파 $u_{d1}(\rho,\theta)$와 $u_{d2}(\rho,\theta)$를 수치계산으로 구한다. 이 과정에서, 물리광학 모서리 회절파 $v_{1,2}(\rho,\theta)$의 회절패턴, $f_{1,2}(\theta,\theta_i)$은 전이각 부근에서 발산하는데, 이를 균등하게 수렴하는 표현식을 사용하여 유한한 값으로 얻은 다음, 가상영역에서 소멸정리식을 만족하도록 하여, 경계면 교정 자장 $\frac{g(\theta)}{2\sqrt{2\pi k_2\rho}}e^{ik_2\rho+i\frac{\pi}{4}}$의 회절 패턴 $g(\theta)$을 구하였다. 이 수치 계산은 해석적으로 다중극 선전원 모멘트를 구하거나, Neumann 급수[28]로 전개한 각 항의 모멘트를 구하여, 수치 계산으로 그 전개 상수를 구하는 방법[15,18]에 비해 훨씬 간단하며, 유한한 패턴 값으로부터 $g(\theta)$을 구하면, 입사각이 경계면 방향일 때를 포함하여 모든 입사각에서, 안정되고, 정확도가 높은 수치 계산을 얻을 수 있다. (40a,b)식으로 구한 자장은 각 영역에서 지배적인 전장을 얻을 수 있는, 준 정전 자장을 포함한 해로서, Helmholtz 미분 방정식과 쐐기 모서리의 모서리 조건, $\rho\to\infty$의 복사조건, 그리고 공기와 유전체 경계 면의 접선 성분 자장은 연속이며, 전장은 모서리에서는 연속이지만, 유전체 경계면에서는 근사적으로 연속인, 엄밀한 해(rigorous solution)라 주장할 수 있을 것이다.

그림 1과 같이, 쐐기각 θ_d가 임의의 예각인 유전체 쐐기에 평면파가 입사한다면, 산란파를 구하기 위하여 기하광학해는 광선추적(ray tracing) 방법을 사용하여 얻을 수 있다[17]. 입사파와 공기 중으로 반사된 파, 유전체 내로 굴절한 파, 유전체 내에서 반사된 파와 다시 공기 매질로 굴절된 파들을, Snell법칙에 따라 반사각과 굴절각을 계산하고, 각각의 반사 계수와 투과 계수를 곱하여 모두 합하면, 이들이 경계면 위의 기하 광학 파를 준다. 경계면 위의 기하 광학 파인 평면파의 합으로부터, 유전체 내와 공기 영역, 그리고 가상공간의 모서리 회절파를 계산할 수 있으며, 직각쐐기의 경우와 같은, 교정 자장을 경계면 위에 가정하여, 소멸 정리를 만족하는 교정해를 구할 수 있다. 또한 모서리 부근에서 발산하는 전장도 직각 쐐기 때와 같은 방법으로 구할 수 있으며, 식 (40a,b)와 비슷한 결과를 수치계산으로 얻을 수 있다. 손실 유전체의 쐐기의 평면파 산란[20] 문제도 같은 방법을 적용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] E. A. Kraut and G. W. Lehman, Diffraction of Electromagnetic Waves by a Right-angled Wedge, J. of Math. Phys., Vol. 10, pp1340-1348, 1958.

[2] J. Radlow, Diffraction by a Right-angled Dielectric Wedge, Inst. J. of Eng. Sci., Vol. 2, pp275-290, 1964.

[3] N. H. Kuo and M. A. Plonus, A Systematic Technique in the Solution of Diffraction by a Right-angled Dielectric Wedge, J. of Math. And Phys., Vol. 46, pp394-407, 1967.

[4] A. A. Aleksandrova and N. A. Khiznyak, Near Field diffracted at a Dielectric Wedge, J. of Appl. Mech. Tech. Phys., Vol.17, No. 4, pp594-599, 1976.

[5] V. Yu. Zavadskii, Certain Diffraction Problems in Contiguous Liquid and Elastic Wedges, Sov. Phys.-Acoustics, Vol. 12, No. 2, pp170-179, 1966.

[6] L. Lewin and I. Sreenivasiah, Diffraction by a Dielectric Wedge, Scientific Report, No. 47, Dept. of Elec. Eng., Univ. of Colorado, 1979.

[7] A. D. Rawlins, Diffraction by a Dielectric Wedge, J. Inst. Maths. Applics., Vol. 19, pp231-279, 1977.

[8] L. Kaminetzky and J. B. Keller, Diffraction by Edges and Vertices of Interfaces, SIAM J. Appl. Math. Vol. 4, pp839-856, June 1975.

[9] G. D. Maliuzhinets, Excitation, Reflection, and Emission of Surface Waves from a Wedge with given Face Impedances, Sov. Phys. Dokl., pp752-755, 1958.

[10] M. I. Herman, J. L. Volakis, and T. B. A. Senior, Analytic Expression for a Function occurring in Diffraction Theory, IEEE Trans. Antennas Propag., Vol. 35, No. 9, pp1038-1086, 1987.

[11] J. F. Rouviere, N. Douchin, and P. F. Combes, Improvement of the UTD Formulation for Diffraction of an Electromagnetic Wave by a Dielectric Wedge, Electron Lett. Vol. 33, pp373-375, 1997.

[12] J. Meixner, The Behavior of EM Fields at Edges, IEEE Trans. Antennas Propag. AP-20, pp442-446, 1972.

[13] J. B. Andersen and V. V. Solodukhov, Field Behavior near a Dielectric Wedge, IEEE Trans. Antennas Propag. AP-26, pp598-602, 1978.

[14] P. L. E. Uslenghi and V. G. Daniele, The Dielectric Wedge, 1999 URSI 26th Gen Assembly Abstr. Pp 67, 1999.

[15] Chang-Sung Joo, Jung-Woong Ra, and Sang-Yung Shin, Scattering by Right Angle Dielectric Wedge, IEEE Trans. Antennas Propag. AP-39, pp61-69, 1984.

[16] Akira Ishimaru, Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

[17] Se-Yun Kim, Jung-Woong Ra, and Sang-Yung Shin, Diffraction by an Arbitrary-Angled Dielectric Wedge: Part I—Physical Optics Approximation, IEEE Trans. Antennas Propag. Vol. AP-39, No.9, pp1272-1281, Sept. 1991.

[18] Se-Yun Kim, Jung-Woong Ra, and Sang-Yung Shin, Diffraction by an Arbitrary-Angled Dielectric Wedge: Part II—Correction to Physical Optics Solution, IEEE Trans. Antennas Propag. Vol. AP-39, No.9, pp1282-1292, Sept. 1991.

[19] H. T. Ha and J. W. Ra, Edge Diffraction by an Arbitrary-Angled Wedge composed of Metal and Lossless Dielectric, Microwave and Optical Technology Letters, vol. 16, No. 2, pp89-93, Oct. 1997.

[20] C. H. Seo and J. W. Ra, Plane-Wave Scattering by a Lossy Dielectric Wedge, Microwave and Optical Technology Letters, vol.25, no.5, pp360-363, June 2000.

[21] J. Y. Jeon and J. W. Ra, Dynamic Field Behavior near the Edge of a Dielectric Wedge, Microwave and Optical Technology Letters, vol.25, no.4, pp257-263, May 2000.

[22] V. G. Danielle, The Wiener-Hopf Formulation of the Penetrable Wedge Problem, Part III, Electromagnetics, Vol. 31, no.8, pp550-578, Nov. 2011.

[23] A. I. Papadopoulos and D. P. Chrissoulidis, A Corrected Physical-Optics Solution to 3-D Wedge Diffraction, Electromagnetics, Vol 20, no 2, pp79-98, 2000.

[24] T. Hashimoto, X. Zhang, and C. O. Sarris, Heuristic UTD Diffraction Coefficient for Three-Dimensional Dielectric Wedge, IEEE Trans. Antenna Propag. Vol. AP-69, No. 8, p4816-4825, Aug. 2021.

[25] Leopold B. Felsen and Nathan Marcuvitz, Radiation and Scattering of Waves, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
[26] Van Bladel, Singular Electromagnetic Fields and Sources, Oxford University Press, New York, 1991.
[27] J. J. Bowman, T. B. A. Senior, P. L. E. Uslenghi, Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, North-Holland Pub. Co.-Amsterdam, John Wiley & Sons, Inc. New York,1969.
[28] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2^{nd} Ed. Cambridge at the University Press, New York, 1966, pp 386.